DISQUISITIONES

DE SUPERFICIEBUS TERTII ORDINIS.

DISSERTATIO INAUGURALIS

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA

BEROLINENSI

PRO

SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE CAPESSENDIS

UNA CUM THESIBUS

DIE XXVIII M. FEBRUARII A. MDCCCLXII.

H. L. Q. C.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

FRIDERICUS AUGUST.

BEROLINENSIS.

ADVERSARII ERUNT:

AD. SCHUMANN, DR. PHIL.
LEO POCHHAMMER, STUD. PHIL.
GUIL. WERNICKE, STUD. PHIL.

BEROLINI

TYPIS CAROLI SCHULTZII.

KOMMANDANTEN-STRASSE 72.

PATRI CARISSIMO DILECTISSIMO

HASCE LITERARUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

OFFERT

AUCTOR.

Steiner, vir illustrissimus in academia regia Berolinensi die 31. Januarii 1856 dissertationem „de superficiebus tertii ordinis“ recitavit non multo post etiam in diarii Crelliani volumine LIII (pag. 133—141) publicatam. In qua tot et tam graves res, quae propriae sunt huic superficierum generi prolatae sunt, ut iis tanquam naturam ipsam earum circumscriptam esse iure dicamus. Itaque non mirum est quod dissertatione illa incitati multi et celeberrimi geometrae in hac re versati sunt; inter quos praestat cel. Clebsch, qui omnia illa consequi ex universalibus algebraicis legibus nuper demonstravit*).

In hoc libello mihi proposui, generationem quandam superficierum tertii ordinis discutere generationi projectivae sectionum conicarum in plano omnino analogam, unde permulta superficiebus illis propria facile deduci possunt. Quae superficierum tractatio quum generaliter absolvi non possit neglecta imaginariarum formarum contemplatione, ad hanc ipsam summum studium conferendum censui.

Iam vero si grave illud principium dualitatis formarum geometricarum respicimus, elucet huic generationi superficierum tertii ordinis omnino analogam existere generationem superficierum tertiae classis. (Superficies tertiae classis est ea ad quam per rectam quamlibet terna plana tangentia duci possunt, nisi forte recta tota in superficie sit sita.)

Priusquam autem ad rem ipsam transeamus necesse est, ut definiamus hos terminos usitatissimos:

Caterva est quod ill. Steiner nominat „Schaar“: simplex infinitas, ex uno valore ad arbitrium realiter variabili pendens. Catervarum complexus est: Schaar-Schaar.

Linea recta nominabitur aut radius (Strahl), cui nihil nisi directio attribuitur; aut recta (Gerade), locus geometricus catervae punctorum, aut axis (Axe), locus geometricus catervae planorum, quae per eam duci possunt, quam ipsam catervam nominabimus fascem (Büschel).

I. De relatione duploprojectiva.

§ 1. Ponimus tres axes ABC ubicunque in spatio sitas et planum quodlibet $\mathfrak{P}$. Per punctum quodvis π in $\mathfrak{P}$ situm terna plana duci possunt, aliud ad alium fascem pertinens, quae nominamus secundum axes $\mathfrak{abc}$. Aliud quidquam punctum π_0 est ipsum quoque intersectio trium planorum $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$ ad fasces ABC pertinentium. Videmus igitur planum $\mathfrak{P}$ terna plana $\mathfrak{abc}$ fascium ABC inter se conjungere, scilicet ea quae in quolibet puncto π plani $\mathfrak{P}$ congruunt. Quod ita exprimimus ut dicamus:

*) Duae dissertationes: 1) Zur Theorie der algebraischen Curven; 2) Ueber eine Transformation der homogenen Funktionen dritter Ordnung mit 4 Veränderlichen. di. Crell. vol. LVIII.

Fasces ABC duploprojectivi ac perspectivi sunt quoad planum $\mathfrak{P}$ et terna plana ex fascibus, quae in puncto quolibet π plani $\mathfrak{P}$ se secant, conjuncta sunt ista relatione duploprojectiva. Iam si ponimus tres fasces $A_1 B_1 C_1$ ita ut A et A_1, B et B_1, C et C_1, sint conjuncti relatione projectiva (ab Ill. Steiner ita nominata, sive anhormonica) et ut plano $\mathfrak{a}$ ex fasce A respondeat planum $\mathfrak{a}_1$ ex fasce A_1 etc., terna plana $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$ fascium $A_1 B_1 C_1$ ipsa quoque relatione quadam conjuncta sunt, id quod ita explicamus ut dicamus fasces $A_1 B_1 C_1$ duploprojectivos esse (non perspectivos in casu generali). Unde apparet:

1) cum binis planis ex duobus fascibus $(A_1 B_1)$ ad arbitrium electis relatione duploprojectiva conjunctum esse in casu generali unum planum ex tertio fasce (C_1);
2) relationem fascium ABC (qui sunt duploprojectivi ac perspectivi) casum specialem esse relationis fascium $A_1 B_1 C_1$.
3) si relatio fascium A_1 et A, B_1 et B, C_1 et C est in casu speciali projective aequalis (projectivisch gleich)*) fasces $A_1 B_1 C_1$ concipi posse tanquam exortos motu fascium ABC servata relatione quae situ perspectivo inter eos constituta est.

§ 2. Iam videamus, quid respondeat polarisatione harmonica fascibus duploprojectivis. Plano $\mathfrak{P}$ respondet punctum Π; axibus ABC rectae $A'B'C'$; puncto π in $\mathfrak{P}$ respondet planum $\mathfrak{p}$ per Π ductum; planis $\mathfrak{abc}$ ex fascibus ABC, quae concurrunt in puncto π, puncta $\alpha\beta\gamma$ in quibus rectae $A'B'C'$ secantur a plano $\mathfrak{p}$; fascibus $A_1 B_1 C_1$ projectivis cum ABC rectae $A'_1 B'_1 C'_1$ projectivae cum $A'B'C'$, ita ut punctis $\alpha\beta\gamma$ in $A'B'C'$ respondeant puncta $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ in $A'_1 B'_1 C'_1$.

Itaque rectas $A'B'C'$ duploprojectivas esse dicimus et perspectivas quoad punctum Π et $\alpha\beta\gamma$ puncta conjuncta rectarum. Nec minus $A'_1 B'_1 C'_1$ duploprojectivae sunt, (non perspectivae in generali casu) et terna puncta $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ conjuncta sunt ista relatione duploprojectiva.

§ 3. Quum fascis A_1 et recta A'_1 sint projectivi, ita ut plano $\mathfrak{a}_1$ respondeat punctum α_1; apparet etiam fascem A_1 et rectam A' projectivos esse, ita ut puncto α_1 respondeat planum $\mathfrak{a}_1$. Quare tres fasces duploprojectivi existunt si cum unaquaque trium rectarum duploprojectivarum et perspective sitarum conjungimus fascem projectivum ac perspectivum, et vice versa; id quod ad fasces duploprojectivos facile construendos magni est momenti.

Iam vero ope situs perspectivi formas duploprojectivas paullo accuratius discutiamus, ita quidem ut fascium ope leges demonstremus quae aeque ad rectas pertinant.

§ 4. Si in plano $\mathfrak{P}$ punctum π ita movetur ut planum $\mathfrak{a}$ ex fasce A per π ductum non varietur, id est si locus geometricus puncti π est recta quaelibet in $\mathfrak{P}$ sita, quae secat axem A_1; fasces B et C sunt puncto π projective conjuncti**). Quum idem fiat si mutamus fasces BC cum fasce A, quumque fasces $A_1 B_1 C_1$ sint projectivi fascibus ABC, consequitur hoc theorema:

Si una ex tribus formis duploprojectivis est constans, relatio inter reliquas est projectiva (anharmonica).

§ 5. Axes ABC perforant planum $\mathfrak{P}$ in punctis $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$, quae formant in casu generali triangulum cujus latera appellamus: $a_2 = \beta_0 \gamma_0$, $b_2 = \beta_0 \alpha_0$, $c_2 = \alpha_0 \beta_0$. Apparet a_2 esse rectam, secundum quam planum fascis B (quod appellamus $\mathfrak{b}_c$) et pla-

*) Steiner, system. Entwickelung 2c. § 13 pag. 46.
**) System. Entw. pag. 105 (28, III) quamvis non directe pronunciatum.

num fascis C (quod appellamus $\mathfrak{c}_b$) se invicem secant. Eodem modo secundum b_2 perseccant se planum $\mathfrak{a}_c$ (ex fasce A) et $\mathfrak{c}_a$ (ex fasce C) ac secundum c_2 planum $\mathfrak{a}_b$ (ex fasce A) et $\mathfrak{b}_a$ (ex fasce B). Atque ista *sex plana principalia* nominare liceat. Iam si punctum π in una rectarum $a_2b_2c_2$, exempli causa in a_2 movetur, neque planum $\mathfrak{b}_c$ ex fasce B neque $\mathfrak{c}_b$ ex C variatur sed solum planum $\mathfrak{a}$ ex fasce A per π ductum. Ac si quaeritur quid fiat de planis $\mathfrak{abc}$, si punctum π infinite appropinquat uni punctorum $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ (ex. c. puncto α_0); videmus ex quacunque regione π accedat ad α_0 in recta linea, ita ut $\mathfrak{a}$ sit constans sed ad arbitrium electum, plana $\mathfrak{bc}$ appropinquare ad $\mathfrak{b}_a\mathfrak{c}_a$; quare planis $\mathfrak{b}_a$ et $\mathfrak{c}_a$ non solum unum planum ex fasce A respondet sed omnia. Ex relationibus projectivis autem consequitur etiam in fascibus $A_1B_1C_1$ (non perspectivis) existere plana principalia $\mathfrak{a}_{b,1}\mathfrak{a}_{c,1}$, $\mathfrak{b}_{a,1}\mathfrak{b}_{c,1}$, $\mathfrak{c}_{b,1}\mathfrak{c}_{a,1}$ quae iisdem subjecta sunt legibus. Eodem modo rectae duploprojectivae habent *puncta principalia*. (Haec sunt in situ perspectivo ea, in quibus binae rectae se secare videntur, si quis ex puncto Π eas intueatur.)

Quare hoc habemus pronunciatum:

> *In unaquaque ex tribus formis duploprojectivis (sive rectis sive fascibus) bina sunt elementa principalia, quorum si respicimus quatuor duabus formis propria ($\mathfrak{a}_{b,1}\mathfrak{a}_{c,1}$, $\mathfrak{b}_{a,1}\mathfrak{b}_{c,1}$) alterum elementum ex hac forma cum altero ex illa* (scilicet $\mathfrak{a}_{b,1}$ cum $\mathfrak{b}_{a,1}$, $\mathfrak{a}_{c,1}$ cum $\mathfrak{b}_{c,1}$; non $\mathfrak{a}_{b,1}$ cum $\mathfrak{b}_{c,1}$ etc.) *ita conjunctum est, ut respondeat iis elementum quodvis ex tertia forma. Sunt omnino sex casus hujusmodi, bini in binis formis. Unumquodque elementum principale duos casus constituit.*

§ 6. Per tres axes ABC duci potest superficies hyperboloides regulata (gradlinig, réglée)*). Ea secat planum $\mathfrak{P}$ in sectione conica. Iam videmus rectam alterius catervae per punctum π_0 illius conicae ductam sectionem esse trium planorum $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0$, quae quidem (quum π_0 sit punctum plani $\mathfrak{P}$) conjuncta sunt relatione duploprojectiva. Apparet ergo omne punctum in recta illa alterius catervae situm aeque atque ipsum punctum π_0 inesse in sectione trium planorum duploprojective conjunctorum; qua de re sequitur:

> *omnia puncta hyperboloidis ABC in sectione trium planorum conjunctorum ex fascibus ABC duploprojectivis ac perspectivis esse sitas,*

atque secundum principium dualitatis:

> *omnia plana hyperboloidem $A'B'C'$ tangentia secare rectas $A'B'C'$ (quae sunt duploprojectivae ac perspectivae quoad punctum Π) in tribus punctis conjunctis.*

Notatio. Hoc theorema omnino analogon est ei quod occurrit contemplanti in plano duos radiorum fasces projectivos et perspectivos quoad rectam quamlibet: scilicet omnia puncta, quae sunt in *recta per fascium centra ducta*, communia esse duobus radiis projective conjunctis, qui quidem omnino congruunt.

§ 7. *Casus singulares situs perspectivi.* Si situs axium ABC et plani $\mathfrak{P}$ est singularis relatio duploprojectiva potest fieri singularis vel dissoluta.

---

*) Quum saepius in iis quae sequuntur de his superficiebus loquendum nobis futurum sit, utile videtur de significatione hoc constituere: Nominabimus hyperboloidem: ABC, dum A, B, C sunt tres rectae ejusdem catervae, quam quidem catervam ipsam rectarum *primam*, catervam autem transversalium primae catervae *alteram* esse volumus.

Primum intelligitur, si una ex axibus (ex. c. A) in $\mathfrak{P}$ sita est, relationem esse dissolutam. Nam si punctum π extra axem A movetur, planum $\mathfrak{a}$ non mutatur, sin punctum π movetur in recta A, ita ut relatio inter B et C sit projectiva, planum $\mathfrak{a}$ est omnino incertum.

Deinde videmus relationem esse dissolutam, si duo ex punctis $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ congruunt, id est si duo axes (ex. c. B et C) se persecant in puncto plani $\mathfrak{P}$. Nam si π movetur per totum planum praeter punctum $\beta_0\gamma_0$ relatio fascium B et C est projectiva, A est indefinitum; si punctum π est in $\beta_0\gamma_0$, plana ex B et C sunt incerta, planum ex A solum est definitum.

Itaque ne relatio duploprojectiva sit dissoluta, opus est ut $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ sint disjuncta spatio non infinite exiguo.

Potest vero fieri ut puncta $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ sint sita in eadem recta, ita ut plana principalia uniuscujusque fascis in unum congruant, id quod re vera est casus singularis.

Utrum axes ABC inter se habeant sectiones necne, ad constituendam relationem duploprojectivam non differt. Nam si quis ducat per $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ tres alias rectas $A_0B_0C_0$, fasces quorum axes sunt $A_0B_0C_0$, sunt duploprojectivi ac perspectivi quoad planum $\mathfrak{P}$, ac praeterea fasces A et A_0 sunt projectivi, si respicis plana quae per idem punctum π proficiscuntur. Itaque fasces $A_1B_1C_1$ aeque projectivi sunt fascibus $A_0B_0C_0$ ac fascibus ABC. Quare ad ipsam constructionem fascium duploprojectivorum axes $A_0B_0C_0$ ad arbitrium eligere possumus. Iam si $A_0B_0C_0$ in uno puncto ζ se secant, relatio duploprojectiva non iam pendet ex situ plani $\mathfrak{P}$, quia terna plana conjuncta $\mathfrak{abc}$ secundum rectam $\zeta\pi$ se secant; quare planum $\mathfrak{P}$ omnino rejicere possumus, quum videamus plana quae per ullum radium fascis ζ ex tribus planorum fascibus mittimus conjunctas esse duploprojective.

(Isti rei respondet polarisatione harmonica: si tres rectae $A'_0B'_0C'_0$ sunt in eodem plano $\mathfrak{z}$, relatio duploprojectiva non iam pendet ex situ puncti Π, et puncta, in quibus quaevis recta in $\mathfrak{z}$ sita secat rectas $A'_0B'_0C'_0$, conjuncta sunt duploprojective.)

§ 8. Si quis quaerat, quomodo metrice exprimi possit relatio duploprojectiva, facile inveniet formulas hasce, in quibus angulus duorum planorum significatur iis duobus literis, quae singulae per se plana ipsa significant:

$$1)\quad \frac{\sin(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{\mathfrak{b},1})\cdot\sin(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_{\mathfrak{c},1})\cdot\sin(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_{\mathfrak{a},1})}{\sin(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{\mathfrak{c},1})\cdot\sin(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_{\mathfrak{a},1})\cdot\sin(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_{\mathfrak{b},1})}=K$$

est relatio qua conjuncta sunt plana $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ fascium duploprojectivorum $A_1B_1C_1$ in situ arbitrario, in qua K significat valorem constantem.

$$2)\quad \frac{\alpha_1\alpha_{\beta,1}\cdot\beta_1\beta_{\gamma,1}\cdot\gamma_1\gamma_{\alpha,1}}{\alpha_1\alpha_{\gamma,1}\cdot\beta_1\beta_{\alpha,1}\cdot\gamma_1\gamma_{\beta,1}}=K$$

est relatio, quae conjungit duploprojective puncta $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ rectarum $A'_1B'_1C'_1$, quarum situs est arbitrarius.

Istarum formularum analogiam cum illis, quae in theoria transversalium trianguli plani occurrunt, quis est quin videat. Et sane illam theoriam tanquam casum specialem haberi posse ejus, quod nos tractamus, quum ex multis aliis rebus tum ex iis de quibus supra (§ 7 ad finem) locuti sumus apparet. Nec solum casus generalis analogiam istam praestat sed etiam casus singularis, in quo relationi alia forma opus est, quia formae 1), 2) identitates fiunt. Recte igitur dicimus theoriam relationum duploprojectivarum amplificationem theoriae transversalium esse, positis loco laterum trianguli tribus rectis ex arbitrio in spatio sitis. Sed quum hae contemplationes et sint facillimae neque necessariae ad ea, de quibus agemus, jam ad alias res transeamus.

II. De sectione generali fascium duploprojectivorum.

§ 9. Postquam supra quae sint propria relationi duploprojectivae auxilio situs perspectivi contemplati sumus, iam adhibeamus quae invenimus ad situm generalem (non perspectivum) perscrutandum. Nec vero diutius de duabus formis duploprojectivis agemus sed solum de fascibus, quia utique analogia duarum formarum constat.

Quaeritur igitur, qualis sit locus geometricus sectionis ternorum planorum conjunctorum $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ ex fascibus duploprojectivis $A_1B_1C_1$, et quomodo respondeant sibi invicem situs perspectivus et situs generalis.

Quum planis $\mathfrak{abc}$ quae se persecant in π respondeant tria plana $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ quae se persecant in casu generali in puncto π_1, unicuique puncto π plani $\mathfrak{P}$ respondet in casu generali punctum π_1; itaque locus puncti π_1 est certe superficies quaedam $\mathfrak{F}$ (quae, si fasces sunt perspective siti, est dissoluta in planum $\mathfrak{P}$ et hyperboloidem ABC).

Primum elucet axes $A_1B_1C_1$ ipsos in $\mathfrak{F}$ esse sitos; nam si b_1 et c_1 ita eligimus ut proficiscantur per idem punctum α axis A_1, elucet planum $\mathfrak{a}_1$ cum illis conjunctum certe per illud punctum α proficisci, itaque α esse punctum superficiei.

Planis principalibus $\mathfrak{c}_{\mathfrak{b},1}$ et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c},1}$ respondet quodvis planum fascis A_1 itaque recta A_2, secundum quam $\mathfrak{c}_{\mathfrak{b},1}$ et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c},1}$ se persecant, omnino in $\mathfrak{F}$ sita est.

Quodsi respicimus id quod § 6 pronunciavimus, videmus: praeterea etiam quinque alias rectas in $\mathfrak{F}$ esse sitas, scilicet:

A_2 est sectio planorum principalium $\mathfrak{c}_{\mathfrak{b},1}$ et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c},1}$.
B_2 „ „ „ „ $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c},1}$ et $\mathfrak{c}_{\mathfrak{a},1}$.
C_2 „ „ „ „ $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a},1}$ et $\mathfrak{a}_{\mathfrak{b},1}$.

A_3 est sectio planorum principalium $\mathfrak{c}_{\mathfrak{a},1}$ et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a},1}$.
B_3 „ „ „ „ $\mathfrak{a}_{\mathfrak{b},1}$ et $\mathfrak{c}_{\mathfrak{b},1}$.
C_3 „ „ „ „ $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c},1}$ et $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c},1}$.

Sunt igitur in unoquoque plano principali praeter axem duae rectae.

Constituamus determinantem

$$\begin{vmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1.$$

Tum apparet unumquodque membrum continere rectas in eodem plano principali sitas, ac si membra positiva sola respicimus, tria plana habemus $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c},1}\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{b},1}\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{a},1}$, in quibus omnes rectae sitae sunt; si membra negativa respicimus, habemus plana $\mathfrak{a}_{\mathfrak{b},1}\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{c},1}\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{a},1}$, quibus eundem in modum omnes rectae illae continentur. Quare si tria plana unam superficiem esse volumus tertii ordinis dissolutam, quam vocamus triedrum, apparet novem illas rectas intersectionem reciprocam efficere duorum triedrorum. Si ad situm perspectivum regredimur, rectae $A_2B_2C_2$ transeunt in rectas $a_2b_2c_2$, quae conjungunt inter se puncta $\alpha_0\beta_0\gamma_0$, rectis $A_3B_3C_3$ respondent in situ perspectivo sectiones planorum $\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ quas nominamus a_3, b_3, c_3, et facile cognoscimus $a_3b_3c_3$ esse rectas alterius catervae hyperboloidis ABC per $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ ductas.

§ 10. Si punctum π movetur in curva k quadam in $\mathfrak{P}$ sita, punctum π_1 movetur in curva k_1 quae in $\mathfrak{F}$ sita est, atque apparet, si curva k secat unam ex rectis $a_2b_2c_2$, curvam k_1 secare rectam respondentem $(A_2B_2C_2)$; si curva k transit per α_0 (β_0, γ_0), curvam k_1 secare rectam A_2 (B_2, C_2) (Confer § 5).

Iam disquiramus eam curvam quam circumscribit π_1, dum π movetur in recta per α_0 ducta: $\mathfrak{a}_1$ est constans, ergo relatio inter $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{c}_1$ constituta est projectiva, ita ut locus geometricus rectae in qua se secant $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{c}_1$ sit hyperboloides simplex; quum recta proficiscatur per α_0 facile cognoscimus hyperboloidem illam proficisci per A_3; quum recta secet a_2 hyperboloides proficiscitur per A_2. Planum $\mathfrak{a}_1$ secat hyperboloidem secundum conicam quae est ea curva quae in $\mathfrak{F}$ respondet illi rectae; id quod generaliter ita pronunciatur:

omnia plana per $A_1B_1C_1$ ducta secant superficiem $\mathfrak{F}$ praeterea secundum conicam.

Si omnia plana per A_1 ducta respicimus, videmus in alio esse sectionem alius hyperboloidis quae omnia efficiunt catervam per $BC\ A_2A_3$ ductam. Ex hac re consequitur conicas ipsas rectam A_1 secare in involutione.

§ 11. Si quaeritur quae sit curva k_1 respondens rectae cuilibet k in $\mathfrak{P}$ sitae, videmus primum, quia recta k secat rectas $a_2b_2c_2$, curvam k_1 secare rectas $A_2B_2C_2$. Quumque si π in k movetur plana $\mathfrak{abc}$ conjuncta sint relatione projectiva, ita ut locus rectae in qua $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{b}_1$ se secant sit hyperboloides quaedam per A_1 et B_1 ducta quae continet etiam C_2, ac locus rectae in qua $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{c}_1$ se secant, alia quaedam hyperboloides per A_1 et C_1 ducta, quae continet etiam B_2, locus vero ejus rectae in qua $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{c}_1$ se secant denuo alia per B_1 et C_1 ducta, quae continet etiam A_2: videmus curvam k_1 sectionem esse reciprocam trium illarum hyperboloidum quarum binae praeterea in una ex axibus $A_1B_1C_1$ se secant; est ergo curva k_1 tertii ordinis, quae secat unamquamque ex rectis $A_2B_2C_2$ in uno, unamquamque ex rectis $A_1B_1C_1$ in duobus punctis (id quod sequitur ex theoremate ab ill. Chasles pronunciato, intuitione ipsa conspicuo: „curva tertii ordinis in superficie secundi ordinis sita secat omnes rectas alterius catervae in uno, alterius in duobus punctis.“). Videmus denique curvam k_1 non secare rectas $A_3B_3C_3$ nisi recta k ducta est per unum ex punctis $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ in quo casu curva k_1 dissolvitur in conicam et unam e rectis $A_3B_3C_3$ (quas quidem supra § 10 impune negligere poteramus).

§ 12. Disquiramus quae curva k'_1 respondeat conicae cuilibet k' per $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ ductae. Apparet istam curvam secare rectas $A_3B_3C_3$, quumque si π in k' movetur plana $\mathfrak{abc}$ conjuncta sint relatione projectiva, etiam k'_1 esse curvam tertii ordinis, quae quidem secat bis rectas $A_1B_1C_1$, semel rectas $A_3B_3C_3$, non rectas $A_2B_2C_2$, nisi quod dissoluta sit in conicam et rectam (aut A_2 aut B_2 aut C_2) id est quod conica k' dissoluta sit in duas rectas quarum altera per unum punctorum $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ proficiscitur, altera per reliqua. Videmus igitur quomodo curvae istae k_1 et k'_1 cohaereant per casum specialem.

Notatio. Ex situ perspectivo elucet duas differentes curvas k_1 se secare invicem in uno puncto semper reali, quia duae rectae k se secant semper in uno reali puncto, eundem ad modum duas differentes curvas k'_1 se secare invicem in uno puncto reali, quia duae conicae k' ductae per $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ se secant in quarto quodam puncto semper reali.

Quum vero recta k et conica k' se secent in duobus punctis aut realibus aut imaginariis curva k_1 et k'_1 se secant in duobus punctis aut realibus aut imaginariis.

§ 13. Ponamus hyperboloidem $A_1B_1C_1$ et nominemus x rectam quamlibet alterius catervae.

Notum est plana $\mathfrak{a}_{1,x}\ \mathfrak{b}_{1,x}\ \mathfrak{c}_{1,x}$ ex fascibus $A_1B_1C_1$ quae se persecant secundum x conjuncta esse relatione projectiva (anharmonica). Itaque etiam plana $\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x\mathfrak{c}_x$ ex fascibus ABC (projectivis cum illis) inter se conjuncta sunt projective, quare locus

geometricus sectionis planorum $\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x\mathfrak{c}_x$ est in casu generali curva tertii ordinis quae secat $\mathfrak{P}$ in tribus punctis $\xi\eta\zeta$, quorum duo esse possunt imaginaria et quae non possunt esse in eadem recta, neque in eadem conica cum punctis $\alpha_0\beta_0\gamma_0$.

Quid respondet in superficie $\mathfrak{F}$ tribus illis punctis? Tres rectae profecto alterius catervae hyperboloidis $A_1B_1C_1$ quas nominabimus $x'y'z'$. Et facile intuitione intelligitur, si punctum π in $\mathfrak{P}$ ex alia directione ad ξ appropinquat, respondens punctum in $\mathfrak{F}$ appropinquare ad aliud punctum rectae x'. Quare puncta $\xi\eta\zeta$ non minus quam $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ sunt puncta singularia.

Si in casu singulari locus sectionis planorum $\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x\mathfrak{c}_x$ est hyperboloides per ABC ducta, videmus semper ea esse conjuncta etiam relatione duploprojectiva, quare omnes rectae hyperboloidis $A_1B_1C_1$ sunt in superficie $\mathfrak{F}$, quae est igitur dissoluta. Ac si istum casum tanquam limitarium respicimus, dicere oportet rectas $x'y'z'$ esse tres ad arbitrium ex rectis alterius catervae hyperboloidis $A_1B_1C_1$ electas. Itaque in ipso situ perspectivo quaelibet ternae rectae alterius catervae hyperboloidis ABC habendae sunt pro $x'y'z'$ (et puncta $\xi_0\eta_0\zeta_0$ sunt ea, in quibus illae rectae secant planum $\mathfrak{P}$).

Quid vero si π movetur in recta jungenti unum punctorum $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ cum uno punctorum $\xi\eta\zeta$ exempli causa in $\alpha_0\xi$? Scimus curvam, quam respondens punctum π_1 circumscribit, esse conicam in qua se secant planum fascis A_1 et hyperboloides e caterva $B_1C_1A_2A_3$; quum autem facile intelligatur x' esse rectam alterius catervae istius hyperboloidis, et planum ex fasce A_1 per ipsam rectam A_1 proficisci, conica illa dissoluta est in rectam x' aliamque quam nominamus x_1 (ita ut omnibus punctis in $\alpha_0\xi$ praeter α_0 et ξ ipsis respondeant puncta in x_1). Quare planum ex fasce A_1 est planum tangens hyperboloidem illam. Quumque x_1 sit in hyperboloide illa per rectas $B_1C_1A_2A_3$ ducta et ex ea caterva in qua non est x', videmus secari x_1 ab $x'A_2A_3$; praeterea x_1 secatur ab A_1 (quia est in plano per A_1 ducto). Eodem modo curvae quae respondent rectis $\alpha_0\eta$, $\alpha_0\zeta$ dissolvuntur in rectas y' et y_1 (quae secat $A_1A_2A_3y'$), z' et z_1 (quae secat rectas $A_1A_2A_3z'$).

Eundem in modum praestant rectae $\beta_0\xi$, $\beta_0\eta$, $\beta_0\zeta$ praeter $x'y'z'$ tres novas rectas $x_2y_2z_2$ quae sunt transversales rectarum $B_1B_2B_3$, secatque praeterea x_2 rectam x' quumque recta $\beta_0\xi$ secetur ab $\alpha_0\eta$ et $\alpha_0\zeta$ in punctis non singularibus, x_2 secat etiam rectas y_1z_1; y_2 secat etiam $y'x_1z_1$; z_2 secat etiam $z'x_1y_1$.

Rectis $\gamma_0\xi$, $\gamma_0\eta$, $\gamma_0\zeta$ respondent (omissis rectis $x'y'z'$) rectae $x_3y_3z_3$ transversales rectarum $C_1C_2C_3$. Recta x_3 secat praeterea rectam x' et rectas y_1z_1, y_2z_2 id quod apparet si quis respicit, rectas $\alpha_0\eta$, $\alpha_0\zeta$, $\beta_0\eta$, $\beta_0\zeta$ secare rectam $\gamma_0\xi$ in punctis non singularibus. Pariter y_3 secat y' x_1z_1, x_2z_2; z_3 secat z' x_1y_1, x_2y_2. —

Iam ad rectas, quae conjungunt puncta $\xi\eta\zeta$, nos vertamus.

Rectae $\xi\eta$ respondet curva tertii ordinis ex genere k_1, secundum quam se secant 3 hyperboloides quarum binis praeterea communis est unus ex axibus $A_1B_1C_1$; apparet autem hanc quoque curvam esse dissolutam in rectas $x'y'$ et tertiam rectam z'' quae quidem est locus punctorum respondentium punctis rectae $\xi\eta$ exceptis ξ et η ipsis; est igitur ex. gr. $A_1x'y'z''$ intersectio duarum hyperboloidum ex tribus illis (§ 11.), unde sequitur, z'' esse transversalem rectarum $x'y'$, non rectarum $A_1B_1C_1$, oportet enim ut inter quatuor rectas in quibus se secant duae hyperboloides, binae $(x'y')$ sint ex altera caterva, binae (A_1z'') ex altera. Quumque recta $\xi\eta$ secet rectas $a_2b_2c_2$, $\alpha_0\zeta$, $\beta_0\zeta$, $\gamma_0\zeta$ in punctis non singularibus, rectam z'' transversalem esse etiam rectarum $A_2B_2C_2$ $z_1z_2z_3$ constat.

Atque eodem modo punctis in recta $\xi\zeta$ (exceptis ξ et ζ ipsis) respondent in $\mathfrak{F}$ puncta in recta y'' transversali rectarum $A_2B_2C_2x'y'y_1y_2y_3$; omni-

busque punctis in recta $\eta\zeta$ (exceptis η et ζ ipsis) respondent puncta in recta x'' transversali rectarum $A_2B_2C_2$ $y'z'$ $x_1x_2x_3$.

Quid vero respondet in $\mathfrak{F}$ conicis per $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ et bina e punctis $\xi\eta\zeta$ ductis?

Conicae per $\alpha_0\beta_0\gamma_0\xi\eta$ ductae respondet curva tertii ordinis ex genere k'_1, quam videmus ipsam quoque dissolvi in tres rectas $x'y'$ et transversalem earum z''' (non transversalem axibus) ita ut omnibus punctis conicae (exceptis $\alpha_0\beta_0\gamma_0\xi\eta$ ipsis) respondeant puncta rectae z''', quam transversalem esse rectarum $A_3B_3C_3$ ex iis quae § 10 dicta sunt apparet. Quumque secet conica rectas $\alpha_0\zeta$, $\beta_0\zeta$, $\gamma_0\zeta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$, in uno quamque puncto non singulari, videmus rectam z''' ipsam quoque esse transversalem rectarum $z_1z_2z_3y''x''$.

Omnibus punctis conicae $\alpha_0\beta_0\gamma_0\xi\zeta$ (exceptis punctis singularibus) respondent puncta in recta y''' transversali rectarum $x'z'$ $A_3B_3C_3$ $y_1y_2y_3x''z''$. Omnibus punctis conicae $\alpha_0\beta_0\gamma_0\eta\zeta$ (exceptis punctis singularibus) respondent puncta in recta x''' transversali rectarum $y'z'$ $A_3B_3C_3$ $x_1x_2x_3y''z''$. Si vero situm perspectivum respicimus tanquam casum limitarium situs generalis, intelligimus rectas $x'''y'''z'''$ esse rectas primae catervae hyperboloidis ABC per $\xi\eta\zeta$ (quae in hoc casu in sectione hyperboloidis et plani $\mathfrak{P}$ sunt sita) ducta.

§ 14. Constat ergo in $\mathfrak{F}$ existere hasce 27 rectas:

I	II
$A_1\ B_1\ C_1$	$x'\ y'\ z'$
$A_2\ B_2\ C_2$	$x''\ y''\ z''$
$A_3\ B_3\ C_3$	$x'''\ y'''\ z'''$
III	
$x_1\ \ x_2\ \ x_3$	
$y_1\ \ y_2\ \ y_3$	
$z_1\ \ z_2\ \ z_3$.	

Ex iis quae § 13 de sectionibus reciprocis harum rectarum dicta sunt cognoscitur:

1) Et systema I et systema II et systema III formare sectionem duorum triedrorum.

2) Rectas in serie quadam (horizontali) systematis II collatas, transversales esse rectarum ejusdem seriei systematis I;

Rectas in columna quadam (verticali) systematis III collatas, transversales esse rectarum ejusdem colonnae systematis I;

Rectas in columna quadam systematis II transversales esse rectarum seriei respondentis ex systemate III.

Id si respicimus facile invenire possumus omnes eas rectas quae secant quamlibet aliam. Exempli causa si quaeritur, quaenam ex rectis secet rectam B_2, videmus hasce decem A_1C_3, A_3C_1, x_2x'', y_2y'', z_2z'', quarum eae, quae non commate disjunctae sunt, ipsae quoque se secant, ita ut B_2 latus sit 5 triangulorum a rectis illis constitutorum. Recta x' cum hisce quinquies binis rectis format triangula: $y''z'''$, $y'''z''$, A_1x_1, B_1x_2, C_1x_3; recta z_3 cum hisce quinquies binis: x_1y_2, y_1x_2, C_1z', C_2z'', C_3z'''.

Quae exempla ad cognoscendam regulam sufficient. Ista regula ad omnes rectas disquirendas adhibita hoc generale pronunciatum invenimus:

Unaquaeque ex 27 rectis in $\mathfrak{F}$ sitis latus est quinque trian-

gulorum ex rectis illis constitutorum; existunt igitur omnino $\frac{27 \cdot 5}{3} = 45$ triangula ex rectis istis constituta.

Iste rectarum nexus varium in modum pronunciari potest (id quod ill. Steiner l. c. p. 135 — 137 demonstravit) de qua quidem re haec pauca proferre liceat:

a) Unaquaeque recta ex 27 illis electa secat unam ex rectis trianguli a tribus aliis formati.

b) In 27 rectis centies vicies 9 rectae sunt quae formant sectionem triedrorum, definiturque talis sectio triedrorum tribus triangulis, quae nullam rectam habent communem.

Sint ista triangula exempli causa $A_1 x' x_1$, $x_2 y_3 z_1$. Plana triangulorum se secant in recta, suntque in ista recta tria puncta, in quibus se secant binae rectae, altera ex altero triangulo: $A_1 z_1$, $x' x_2$, $x_1 y_2$. In plano $A_1 z_1$ etiam recta z' est sita in plano $x' x_2$ etiam B_1 in plano $x_1 y_3$ etiam z_2 sitae sunt, formantque etiam $B_2 z' z_2$ triangulum, quare videmus rectas

$$\begin{vmatrix} A_1 & z_2 & x_2 \\ B_1 & z_1 & x_1 \\ y_3 & x' & z' \end{vmatrix}$$ esse sectionem triedrorum.

Ac facile intelligitur inter 45 triangula 32 esse quae nullam rectam communem cum alio quodam ex triangulis habent; bina ex illis 32 cum hoc constituunt 9 rectas, quae formant sectionem triedrorum, itaque unumquodque triangulum est in $\frac{32}{2} = 16$ sectionibus triedrorum, quumque in sectione triedrorum sex triangula sint, omnino ex 27 rectis formantur $\frac{16 \cdot 45}{6} = 120$ sectiones triedrorum. Si habemus unam ex his triedrorum sectionibus facile ex nexu rectarum intelligitur, 18 reliquas rectas formare duas alias triedrorum sectiones, ita ut 27 rectae quadragies in tria systemata analoga iis quibus initio hujus paragraphi usi sumus, collocari possint.

Exempli causa:

I	II	III
$A_1\ z_2\ x_2$	$y_1\ B_2\ B_3$	$y_1\ x_3\ z_3$
$B_1\ z_1\ x_1$	$y_2\ A_2\ A_3$	$C_3\ z''\ x''$
$y_3\ x'\ z'$	$C_1\ y'''\ y''$	$C_2\ z'''\ x'''$

etc.

Notatio. Inter varias formas, quibus nexus rectarum pronunciari potest commemoramus etiam hanc, quum postea eam adhibituri simus:

Sex rectis quarum quinque formant 2 triangula cum uno latere communi, per quod sexta non proficiscitur, definita est una sectio triedrorum.

Exempli causa rectis

$A_1 x' x_1$ $y' y_1$ y'' definita est sectio triedrorum:

$$\begin{vmatrix} A_1 & x'' & y'' \\ A_2 & x' & y' \\ z''' & y_1 & x_1 \end{vmatrix}$$

neque ulla alia triedrorum sectio 6 illas rectas continet, et planum $A_1 x' x_1$ est in altero triedro, planum $A_1 y' y_1$ in altero.

§ 15. Iam quamquam ex iis quae praecedunt eluceat superficiem $\mathfrak{F}$ tertii esse ordinis, attamen id accuratius demonstremus aequatione analytica, praesertim quum ad alias res disquirendas ea carere non possimus.

Sint $\mathfrak{a}_b = 0$, $\mathfrak{a}_c = 0$, $\mathfrak{b}_c = 0$, $\mathfrak{b}_a = 0$, $\mathfrak{c}_a = 0$, $\mathfrak{c}_b = 0$

aequationes planorum principalium fascium ABC, ita ut habeant hanc formam

$$\mathfrak{a}_b = a_1 x + a_2 y + a_3 z - a_4$$
$$\mathfrak{a}_c = A_1 x + A_2 y + A_3 z - A_4$$

$$\mathfrak{b}_c = b_1 x + b_2 y + b_3 z - b_4$$
$$\mathfrak{b}_a = B_1 x + B_2 y + B_3 z - B_4$$

$$\mathfrak{c}_a = c_1 x + c_2 y + c_3 z - c_4.$$
$$\mathfrak{c}_b = C_1 x + C_2 y + C_3 z - C_4$$

Tum aequatio plani $\mathfrak{a}$ ex fasce A est

$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}_b - \lambda \mathfrak{a}_c = 0$ (in qua λ est coefficiens arbitrarius)

quae est evoluta:

$$\mathfrak{a} \equiv (a_1 - \lambda A_1) x + (a_2 - \lambda A_2) y + (a_3 - \lambda A_3) z - (a_4 - \lambda A_4) = 0$$

pariter invenimus aequationes planorum $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ fascium BC

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_c - \mu \mathfrak{b}_a) \equiv (b_1 - \mu B_1) x + (b_2 - \mu B_2) y + (b_3 - \mu B_3) z + (b_4 - \mu B_4) = 0$$
$$\mathfrak{c} = (\mathfrak{c}_a - \nu \mathfrak{c}_c) \equiv (c_1 - \nu C_1) x + (c_2 - \nu C_2) y + (c_3 - \nu C_3) z + (c_4 - \nu C_4) = 0$$

in quibus μ et ν arbitrarii sunt.

Quum vero plana $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ se secent in puncto π plani $\mathfrak{P}$, cujus aequatio est

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 x + \mathfrak{p}_2 y + \mathfrak{p}_4 z - \mathfrak{p}_4 = 0,$$

constituenda est relatio inter $\lambda\mu\nu$, quae efficit ut aequationibus $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{c} = 0$, $\mathfrak{P} = 0$ eodem systemate xyz satisfiat.

Quae conditio est determinans:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda A_1, & a_2 - \lambda A_2, & a_3 - \lambda A_3, & a_4 - \lambda A_4, \\ b_1 - \mu B_1, & b_2 - \mu B_2, & b_3 - \mu A_3, & b_4 - \mu A_4, \\ c_1 - \nu C_1, & c_2 - \nu C_2, & c_3 - \nu C_3, & c_4 - \nu C_4, \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{p}_4 \end{vmatrix} = 0$$

cujus evolutio praestat hanc formam

$$\text{I)} \quad \mathrm{A}\lambda\mu\nu + \mathrm{B}\mu\nu + \mathrm{C}\lambda\nu + \mathrm{D}\lambda\mu + \mathrm{E}\lambda + \mathrm{F}\mu + \mathrm{G}\nu + \mathrm{H} = 0.$$

Quum vero plana $\mathfrak{a}_b \mathfrak{a}_c$ etc. sint principalia necesse est, ut si ponamus $\lambda = 0$, $\mu = \infty \left(\frac{1}{\mu} = 0\right)$, ν sit valor incertus (confer § 5).

Si vero in aequatione I per μ divisa λ valori 0, μ valori ∞ appropinquare jubemus, obtinemus $\mathrm{B}\nu + \mathrm{F} = 0$. Ergo ν non potest fieri incertum, nisi identice $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{F} = 0$. Eundem in modum invenimus aequationes identicas $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{E} = 0$ et $\mathrm{G} = 0$, $\mathrm{D} = 0$. (Quae enim aequationes exprimunt conditiones quibus plana $\mathfrak{a}_b \mathfrak{a}_c$ $\mathfrak{b}_c \mathfrak{b}_a$ $\mathfrak{c}_a \mathfrak{c}_b$ re vera sunt plana principalia). Quare determinans Δ hac forma exprimi potest

$$\text{II)} \quad \Delta = \mathrm{A}\lambda\mu\nu + \mathrm{H} = 0.$$

Sunt vero fasces $A_1 B_1 C_1$ projectivi istis habentque aequationes

$$\text{III)} \quad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_{b,1} - \lambda_1 \mathfrak{a}_{c,1} = 0, \; \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_{c,1} - \mu_1 \mathfrak{b}_{a,1} = 0, \; \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_{a,1} - \nu_1 \mathfrak{c}_{b,1} = 0.$$

Inter λ et λ_1 existit relatio $\lambda_1 = \varkappa\lambda$ eodemque modo $\mu_1 = \varkappa'\mu$, $\nu_1 = \varkappa''\nu$ quae exprimunt

relationem projectivam fascium A et A_1, B et B_1, C et C_1. Quare quum inter $\lambda\mu\nu$ existat relatio II inter $\lambda_1\mu_1\nu_1$ hanc habemus aequationem

$$\mathrm{A}\lambda_1\mu_1\nu_1 + \mathrm{H}\varkappa\varkappa'\varkappa'' = 0 \text{ vel, si ponimus}$$

$$\text{IV)}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}\varkappa\varkappa'\varkappa'' = \mathrm{K}.$$

Aequationem loci geometrici puncti π, id est superficiei $\mathfrak{F}$ obtinemus eliminatione valorum $\lambda_1\mu_1\nu_1$ ex aequationibus III et IV, quare invenimus aequationem superficiei esse

$$\mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{a}_{b,1}\mathfrak{b}_{c,1}\mathfrak{c}_{a,1} + \mathrm{K}\,\mathfrak{a}_{c,1}\mathfrak{b}_{a,1}\mathfrak{c}_{b,1} = 0.$$

Quae est aequatio tertii ordinis.

§ 16. Ex hac aequatione nonnulla intelligimus:

1) Tres axes $A_1B_1C_1$ non aliam vim habent quam tres rectae $A_2B_2C_2$ vel $A_3B_3C_3$ vel $A_1A_2A_3$, — $B_1B_2B_3$, — $C_1C_2C_3$ (quae se non persecant in casu generali) quare hae quoque formant ternos axes fascium duploprojectivorum, quorum sectio est $\mathfrak{F}_3$.

2) Unaquaeque superficies tertii ordinis, quae in se habet 9 rectas efficientes sectionem duorum triedrorum, quorum aequationes sint $\mathfrak{pqr} = 0$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1 = 0$ (in quibus $\mathfrak{pqr}$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1$ sunt functiones lineariae reales valorum xyz), exprimi potest aequatione $\mathfrak{pqr} + K\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1 = 0$. Itaque haec superficies generatur tribus fascibus duploprojectivis, quorum quidem axes sunt ternae rectae ex 9 illis electae quae non se secent; videmus igitur istam superficiem semper continere 27 rectas.

3) Quum vero inter 27 illas rectas centies vicies 9 sint quae formant sectionem triedrorum quumque in unaquaque triedrorum sectione sexies ternae rectae inveniantur quae non se secant, consequitur unamquamque superficiem $\mathfrak{F}_3$, quae continet sectionem triedrorum, septingenties vicies esse sectionem trium fascium duploprojectivorum. Itaque plana per quamlibet ex illis rectis ducta secant superficiem $\mathfrak{F}_3$ praterea in conica et omnes istae conicae secant rectam in involutione (§ 10). Itaque duae conicae non per idem punctum rectae proficisci possunt nisi omnes per illud punctum proficiscuntur, id quod non aliter fieri posset quam si per illud ipsum punctum proficisceretur una ex rectis, quae illam rectam in casu generali non secant; in quoquidem casu involutio est singularis.

3) Si novem rectae, quae formant sectionem triedrorum $\begin{matrix} A_1B_1C_1, \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{matrix}$ praestant casum generalem; non plus quam 27 rectae in $\mathfrak{F}_3$ existunt.

[Nam si esset praeter 27 rectas nova recta r in superficie $\mathfrak{F}_3$, elucet, quum r secet planum $\mathfrak{a}_{b,1}$, eam transversalem esse aut rectae A_1 aut rectae B_3 aut rectae C_2, quum r secet plana $\mathfrak{b}_{c,1}$ et $\mathfrak{c}_{a,1}$, r esse etiam transversalem unius ex rectis $A_2B_1C_3$ et unius ex rectis $A_3B_2C_1$; r igitur esset transversalis trium rectarum. Istae rectae vero neque possunt formare triangulum, quia planum non plus quam tres rectas cum $\mathfrak{F}_3$ communes habere potest; neque possunt esse tres rectae quae non se secant, quia hyperboloides per illas ducta praeter r jam tres alias rectas alterius catervae communes habet cum $\mathfrak{F}_3$; neque possunt duae istarum rectarum habere sectionem, ita ut r transeat per punctum sectionis et per tertiam rectam, quia id efficeret ut involutio in utraque recta, per quarum sectionem transit r, sit dissoluta vel singularis, id

quod non potest fieri, si sectio triedrorum est generalis. Itaque plane non potest existere recta r.]

§ 17. Quum situm perspectivum casum specialem esse sciamus in quo $\mathfrak{F}_3$ dissoluta sit in planum $\mathfrak{P}$ et hyperboloidem ABC, constat omnes relationes projectivas, quae in casu generali conjungunt rectas superficiei, etiam usque in casum perspectivum urgeri posse.

Ac si recordamur quae § 9 et § 13 discussimus, invenimus rectas 27 situs perspectivi hasce:

Rectis $A_1 B_1 C_1$ respondent axes ABC, id est tres rectae ejusdem catervae hyperboloidis ABC;

rectis $A_2 B_2 C_2$ respondent rectae $a_2 b_2 c_2$, quae conjungunt puncta $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ in quibus ABC secant $\mathfrak{P}$;

rectis $A_3 B_3 C_3$ respondent rectae $a_3 b_3 c_3$ alterius catervae hyperboloidis ABC per $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ ductae [nec difficile est triedra cognoscere quorum sectio sunt illae rectae, quae formant systema I (§ 14).]

Plane eodem modo inter se conjunctae sunt rectae secundi systematis: $x'y'z'$ sunt tres rectae alterius catervae hyperboloidis ABC, quae secant planum $\mathfrak{P}$ in $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$; $x'''y'''z'''$ sunt rectae primae catervae per $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ ductae; $x''y''z''$ sunt rectae quae conjungunt puncta $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$. Systema tertium vero constituitur rectis in $\mathfrak{P}$, quae conjungunt singula puncta $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ cum singulis punctis $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$.

Quum vero in casu generali septingenties vicies tres ex istis rectis eligi possint, quae axes sunt fascium duploprojectivorum, quorum sectio est $\mathfrak{F}_3$, etiam in situ perspectivo septingenties vicies terni fasces duploprojectivi sunt. Et ternos axes ita electos dicere poterimus esse in situ quodam perspectivo: Quum ea sit re vera vis et natura situs perspectivi formarum projectivarum, ut elementa conjuncta non formam generalem ex hac relatione procedentem praestent, sed dissolutam.

Iam si ita definitum esse situm perspectivum volumus, disquirendo 720 illos casus inveniemus tres fasces duploprojectivos habere 4 differentes situs perspectivos. Disquisitio ipsa vero quum sit et longinquior et facillima, vereor ne nimis fatigem lectorem eam plane enarrando. Itaque sufficiat quatuor illos situs breviter definire exemplisque additis pronunciare quoties quisque inter 720 illos casus inveniatur:

1) Situs perspectivus primus est is, a quo nos discessimus; praestant eum etiam $a_3 b_3 c_3$, $x'y'z'$ etc.
2) Si hyperboloidi simplici cuilibet inscriptum est triangulum (ex. c. $a_2 b_2 c_2$) per unumquodque punctum hyperboloidis proficiscuntur tria plana ex fascibus $a_2 b_2 c_2$ quae conjuncta sunt relatione duploprojectiva et fasces sunt in situ perspectivo secundo. (In eo situ sunt ex. c. $x''y''z''$, $x_1 x_2 x_3$ etc.)
3) Tres fasces quorum axes sunt: quaevis recta (a_2) et duae rectae ullius hyperboloidis non ex eadem caterva electae Aa_3 sunt duploprojectivi, si conjungis ea plana, quae in puncto quovis hyperboloidis se secant, formantque situm tertium perspectivum. (Sunt in eo situ $a_2 A a_3$, $x'x'b_3$ etc.)
4) Tres fasces, quorum axes sunt: duae rectae arbitrariae ($a_3 b_2$), quae per idem punctum γ_0 hyperboloidis cujuslibet proficiscuntur et recta quaelibet ejusdem hyperboloidis x' conjuncti sunt duploprojective, si conjungis terna plana, quae in hyperboloide se secant, formantque quartum situm perspectivum. (Sunt in eo situ ex. c. $a_2 b_2 x'$, $y_3 A_2 z'$ etc.)

5) Saepissime etiam relatio duploprojectiva est **specialis** vel **dissoluta**: Exempli causa $x_1x_2x_3$ praestant casum specialem primi situs; $x_1 y B_3$ non jam re vera praestant relationem duploprojectivam. Ac si omnes 720 casus disquirimus, invenimus 240 esse omittendas, quarum 180 non re vera praestant relationem duploprojectivam, 60 sunt casus speciales quos ad primum situm referre possumus; reliquos vero ita esse positas ut sint

360 in quarto
60 in tertio
40 in primo
20 in secundo situ perspectivo.

Et facile potest demonstrari, non existere alium situm perspectivum praeter istos, i. e. si habemus superficiem tertii ordinis dissolutam, non inveniri posse in ea axes trium fascium duploprojectivorum, quorum sectio est illa superficies dissoluta, si eos casus de quibus diximus exceperis.

Elucet ad definiendam relationem duploprojectivam aeque a quovis alio situ perspectivo proficisci nos potuisse, in quo casu plane eodem modo invenissemus plana principalia etc. Neque hoc omnino negligendum videtur, nam jam nunc superficies $\mathfrak{F}_3$ non videtur esse generalis, quia hyperboloides quae in situ perspectivo occurrit non est superficies generalis secundi ordinis; jam vero situs secundus non valde mutatur, si pro hyperboloide simplice ponimus sive hyperboloidem duplicem sive ellipsoidem; itaque hae quoque videntur definire relationem fascium, qua superficies tertii ordinis generari possunt. Similia ex reliquis sitibus invenire possumus. Sed ut has res accuratius disquiramus, jam ad valores imaginarios diligentius spectemus necesse est.

III. De valoribus imaginariis in geometria interpretandis.

§ 18. Omnis geometria, si analytice eam tractamus, respici potest tanquam complexus legum algebraicarum. Istae vero quum habeant significationem multo generaliorem quam res geometricae quarum ope sunt inventae (id quod efficit ut valores coordinatarum fieri possint imaginarii), geometria ipsa casum specialem tantum praebet illarum legum. Convenit autem nomina rerum atque operationem ex casu illo speciali, in quo reales sunt, inducere in casum generalem. Itaque in geometria ista symbolica **punctum** definitur tribus coordinatis xyz, quae in casu generali sunt **valores complexi**.

Superficies est totalitas punctorum quorum coordinatae sunt conjunctae una conditione. Duae superficies communem habent curvam etc.

Non vero est negligendum, lineam seu curvam non jam simplicem punctorum catervam continere sed catervarum complexum, quia valor variabilis arbitrarius ex quo pendent coordinatae est ipse complexus, itaque continet in se duos valores arbitrarie realiter variabiles. Aequatio superficiei semper ita scribi potest: $\mathfrak{f}(xyz) + i\phi(xyz) = 0$, ita ut $\mathfrak{f}$ et ϕ reales tantum contineant coefficientes; itaque $\mathfrak{f}(xyz) = 0$ et $\phi(xyz) = 0$ sunt aequationes superficierum, quae nominantur reales (quamvis ne eas quidem continere puncta realia necesse sit; ex. g. si $\mathfrak{f}(xyz)$ est $= \left[\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} + 1\right]$ in qua a et b sunt reales).

Itaque $\mathfrak{f} = 0$, $\phi = 0$ aequationes sunt curvae quam dicimus realem, cujus puncta certe satisfaciunt aequationi $\mathfrak{f}(xyz) + i\phi(xyz) = 0$; ita ut sit theorema:

In unaquaque superficie sita est curva realis quae, si superficies est ordinis n, in casu generali est ordinis n^2.

Potest autem $af + b\phi = 0$ identice esse (in casu etiam specialiori $a = 0$ sive $b = 0$); tum superficies ipsa est realis.

Quae si ad primum ordinem adhibemus id consequitur: omne planum continet unam rectam realem (quae quidem semper continet catervam simpl. punctorum realium).

Sit aequatio plani

$$(ax + by + cz - d) + i\,(a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1) - 0$$

inest igitur recta realis

$$\begin{cases} ax + by + cz - d = 0 \\ a_1 x + b_1 y = c_1 z - d_1 = 0. \end{cases}$$

Si simul $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$ neque $d_1 = 0$

habemus casum limitarium in quo illa recta realis est infinite remota.

[Non difficile est demonstrare eodem modo per unumquodque punctum (complexum) unam duci posse rectam realem.]

§ 19. Si respicimus quamcunque rectam

$$p \equiv (ax + by + cz - d) + i\,(a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1) = 0$$
$$q \equiv (a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2) + i\,(a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3) = 0$$

quaerimusque, utrum habeat puncta realia necne, id est utrum aequationibus

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z - d &= 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z - d_3 &= 0 \end{aligned}$$

eodem systemate xyz satisfiat necne; scimus id in casu generali non fieri, sed conditione hac quae jungit coefficientes:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Existunt igitur tria genera rectarum:

- rectae quae nullum punctum reale continent, quas dicemus imaginarias.
- rectae quae unum tantum punctum reale continent, quas nominabimus punctatas.
- rectae quae continent plus quam unum punctum reale, id est catervam simplicem punctorum realium, quas nominabimus reales.

Iam si respicimus planum reale, apparet in eo rectas imaginarias esse non posse; omnes rectae in plano reali igitur sunt aut reales aut punctatae.

Iam si disquirimus planorum fascem per rectam quamlibet ($p = 0$, $q = 0$) ductum i. e. totalitatem planorum, quae per illam proficiscuntur, unumquodque planum hanc habere aequationem scimus

$$p + \mathfrak{L} q = 0$$

in qua $\mathfrak{L}$ est valor complexus arbitrarius $= l + \lambda i$ (ita ut non iam simplex caterva planorum in fasce sit sed duplex). Aequatio plani cujusvis ex isto fasce fit sejunctis valoribus realibus ab imaginariis:

$$(a + la_2 - \lambda a_3)x + (b + lb_2 - \lambda b_3)y + (c + lc_2 - \lambda c_3)z - (d + ld_2 - \lambda d_3)$$
$$+ i[(a_1 + \lambda a_2 + la_3)x + (b_1 + \lambda b_2 + lb_3)y + (c_1 + \lambda c_2 + bc_3)z + (d_1 + \lambda d_2 + ld_3)] = 0.$$

Plana fascis in casu generali omnia sunt imaginaria; conditio qua aequatio plani fit realis est: ut substitutis quibusdam valoribus l et λ aut realis pars aut imaginaria fiat $= 0$, aut altera non differat ab altera nisi factore constante, quae omnia exprimuntur his aequationibus:

$$\begin{aligned} u(a + la_2 - \lambda a_3) + v(a_1 + \lambda a_2 + la_3) &= 0 \\ u(b + lb_2 - \lambda b_3) + v(b_1 + \lambda b_2 + lb_3) &= 0 \\ u(c + lc_2 - \lambda c_3) + v(c_1 + \lambda c_2 + lc_3) &= 0 \\ u(d + ld_2 - \lambda d\ ) + v(d_1 + \varkappa d_2 + ld_3) &= 0 \end{aligned}$$

ex quibus aequationibus $l\lambda uv$ sunt inveniendae, ita vero ut non simul $u = 0$, $v = 0$ quia id non convenit cum significatione valorum uv.

Istae aequationes ita scribi possunt

$$\begin{aligned} ua + va_1 + (ul + v\lambda)a_2 + (vl - u\lambda)a_3 &= 0 \\ ub + vb_1 + (ul + v\lambda)b_2 + (vl - u\lambda)b_3 &= 0 \\ uc + vc_1 + (ul + v\lambda)c_2 + (vl - u\lambda)c_3 &= 0 \\ ud + vd_1 + (ul + v\lambda)d_2 + (vl - u\lambda)d_3 &= 0 \end{aligned}$$

et facile cognoscimus conditionem, qua hae aequationes solvi possunt, esse $D = 0$, ac si $D = 0$ in casu generali aut unum systema valorum $\frac{u}{v}$, l, λ existere, aut simplicem catervam; ex quibus rebus intelligimus:

per rectam imaginariam nullum planum reale duci posse;
per rectam punctatam unum planum reale duci posse;
per rectam realem simplicem catervam planorum realium duci posse.

Iam si axis fascis est punctata, unum ex planis istius fascis est reale; in unoquoque reliquorum planorum est una recta realis quae omnes per punctum reale ρ axis proficiscuntur (nam si ulla ex illis rectis non per ρ proficisceretur, planum in quo sita est contineret praeter rectam realem punctum reale ρ, quare ipsum reale esset). Quum vero per unumquodque punctum reale spatii planum illius fascis duci possit quumque in eo certe recta realis sit, quae punctum illud cum ρ conjungit, hoc habemus pronunciatum:

Fascis cum axi punctato continet unum planum reale et catervarum complexum planorum imaginariorum, quorum quidque continet unum membrum fascis radiorum realium per ρ ductorum.

(Hoc theorema aliter pronunciatum continet theorema polarisatione harmonica ei respondens.)

Rectae reales quae sunt in planis fascis, cujus axis est imaginarius, se secare non possunt, quia si duae rectae reales se secarent, id in puncto reali fieret, atque istud punctum certe in axi esset, id quod repugnat contra hypothesin.

(Non est difficile ex aequatione rectae realis plani $p + lq = 0$, locum geometricum istius rectae discutere, quod quidem quum ad nostram rem non pertineat praetermittamus.)

§ 20. Omnes superficies secundi ordinis (reales et imaginariae) respici possunt tanquam regulatae (gradlinig) ita tamen, ut rectae sint aut reales aut punctatae aut imaginariae.

[Id quod exempli causa demonstrari potest transformatione coordinatarum, quae efficit ut ex aequatione dispareant omnia membra praeter haec

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2 = 0$$

in quo casu generaliter origo coordinatarum est ipsa imaginaria. Ista aequatio ita scribi potest

$$(ax + iby)(ax - iby) + (cz + id)(cz - id) = 0.$$

Quare consequitur in superficie esse duos complexus catervarum rectarum (altera caterva transversalium alterius).

$$1) \begin{cases} (ax + iby) + l(cz + id) = 0 \\ l(ax - iby) - (cz - id) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (ax + iby) + m(cz - id) = 0 \\ m(ax - iby) - (cz + id) = 0 \end{cases}$$

m et l sunt constantes arbitarii complexi.]

Est ergo unaquaeque superficies $\mathfrak{F}_2$ secundi ordinis sectio duorum fascium projectivorum si quidem hanc relationem in valores imaginarios inducimus.

Iam vero accuratius ad superficies reales spectemus.

1) Si in superficie reali $\mathfrak{F}_2$ est recta realis g_1, omne planum reale per illam ductum secat $\mathfrak{F}_2$ in altera recta reali, quare habemus superficiem realiter regulatam (hyperboloidem, paraboloidem hyperbolicam, conum). Si per rectam g_1 ducimus planum imaginarium, istud secat $\mathfrak{F}_2$ etiam in alia recta g_2, quae non potest esse realis (quia in plano imaginario non possunt esse duae rectae reales). Punctata haec recta g_2 in eo tantum casu esse potest, ut $\mathfrak{F}_2$ sit conus. Nam punctum reale rectae g_2 situm esset in g_1, per omne punctum reale rectae g_1 autem etiam alia recta realis superficiei proficiscitur, si quidem $\mathfrak{F}_2$ non est conus. Proficiscerentur igitur per illud punctum tres rectae superficiei, id quod non potest esse nisi superficies est conus. Si igitur $\mathfrak{F}_2$ non est conus, g_2 est imaginaria.

2) Si in superficie reali $\mathfrak{F}_2$ quae non est conus, una recta g_1 est punctata, omnes rectae punctatae sunt et superficies est aut hyperboloides duplex aut ellipsoides. Nam planum quodlibet imaginarium $\mathfrak{p}$ per g_1 ductum secat $\mathfrak{F}_2$ in duabus rectis g_1 et g_2. Planum $\mathfrak{p}$ vero in se habet rectam realem quae secat $\mathfrak{F}_2$ in puncto reali rectae g_1, quae igitur habet etiam alterum punctum reale commune cum $\mathfrak{F}_2$. Quare apparet etiam g_2 esse punctatam. Facile etiam intelligitur planum reale quod per g_1 duci potest, secare $\mathfrak{F}$ praeterea in recta punctata g', quae secat rectam g_1 in puncto reali et quae nominatur conjuncta cum g_1 quia hae duae rectae si tamquam unam curvam eas respicimus praestant casum limitarium conicae realis, $\left(\text{quemadmodum conica } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0\right)$ vel quia hae duae rectae sectio sunt plani realis $\mathfrak{p}$ et duorum planorum conjunctorum (i. e. quorum aequationes sunt $(p + qi) = 0$ et $(p - qi) = 0$).

Habemus igitur has species superficierum realium secundi ordinis:

1) Eas, quae continent duas catervas simplices rectarum realium et duos catervarum complexus rectarum imaginariarum (hyperboloides simplices).

2) Eas quae continent duos catervarum complexus rectarum imaginariarum neque ullam rectam realem (quarum igitur nullum punctum est reale).

3) Eas quae continent duos complexus catervarum rectarum punctatarum (hyperboloides duplices et ellipsoides).

4) Eas quae continent catervam simplicem rectarum realium et complexum catervarum rectarum punctatarum (coni, qui sunt casus limitarii et speciei 1) et speciei 2).

Notatio. Si superficies speciei 2) fascibus projectivis generantur disquiri potest, quae sit significatio geometrica istius generationis. Axes fascium *AB* sunt punctati, puncta reales sint $\alpha\beta$; duo plana conjuncta secant se in recta complexa g quorum punctum reale est γ et apparet rectas $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$ esse rectas reales planorum respondentium ex duobus fascibus. Recta realis igitur plani ex fasce A se secat cum recta reali plani respondentis fascis B. Quare quod ad partem realem pertinet, videmus relationem duorum planorum fascium mutari relatione duorum radiorum fascium, et potest disquiri quae sit relatio geometrica duorum fascium radiorum, ut bini radii conjuncti se secent locusque sectionis sit superficies secundi ordinis speciei 2). — Sed hoc loco aliae res nobis sunt propositae.

IV. De generali superficie tertii ordinis ac de numero et situ rectarum realium, punctatarum, imaginariarum quae in ea occurrunt.

§ 21. Superficies $\mathfrak{F}_3$, quam fascibus duploprojectivis construxeramus aequationem habebat:

$$\text{I)}\quad \mathfrak{a}_{b,1}\mathfrak{b}_{c,1}\mathfrak{c}_{a,1} + K\mathfrak{a}_{c,1}\mathfrak{b}_{a,1}\mathfrak{c}_{b,1} = 0$$

in qua K erat constans realis et $\mathfrak{abc}$ functiones reales et lineariae valorum xyz. Numerus constantium arbitrariorum istius aequationis est 19, itaque aequa numero constantium arbitrariorum aequationis generalis superficierum tertii ordinis. Ex qua re consequitur unamquamque superficiem algebraicam tertii ordinis (sive realem sive imaginariam) aequatione illius formae I exprimi posse, ita vero ut constantes aequationis sint in casu generali complexi, et ut in casibus singularibus valores limitarios habere possint, qui notum in modum tractantur.

Iam id si constat videmus in unaquaque superficie tertii ordinis in casu generali sitas esse novem rectas quae efficiunt sectionem reciprocam triedrorum

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{b,1}\cdot\mathfrak{b}_{c,1}\cdot\mathfrak{c}_{a,1} = 0 \\ \mathfrak{a}_{c,1}\cdot\mathfrak{b}_{a,1}\cdot\mathfrak{c}_{b,1} = 0. \end{cases}$$

Inde autem quum ea quae antea de valoribus realibus dicta sunt omnino in imaginarios adhiberi possint, apparet in unaquaque superficie tertii ordinis 27 rectas (reales, punctatas, imaginarias) esse sitas quarum nexus omnino is est, de quo supra (§ 14) diximus, si quidem omnia in complexos valores inducimus.

§ 22. Iam quaeritur quibus conditionibus subjectae sint rectae si superficies $\mathfrak{F}_3$ est realis (id est si coefficientes aequationis sunt reales).

Ternae rectae in $\mathfrak{F}_3$ sitae, quae triangulum formant, aut in reali aut in imaginario plano sunt sitae.

A. Si planum est reale necesse est, ut tres illae rectae praestent curvam realem tertii ordinis, id quod duobus casibus potest fieri:
   1) tres rectae trianguli sunt reales;
   2) una est realis, reliquae sunt punctatae et conjunctae.

B. Si planum est imaginarium, sita est in eo recta realis, quae aut
   1) secat $\mathfrak{F}_3$ in tribus punctis quorum aut unum aut tria sunt realia, quare

consequitur aut *unam rectam* trianguli esse *punctatam* reliquas imaginarias, aut *omnes esse punctatas.*

2) *aut ipsa in* $\mathfrak{F}_3$ *sita est ita* ut sit una (u) ex tribus rectis uvw trianguli. Tum utraque ex reliquis (v, w) rectis posset esse aut imaginaria aut punctata, ita vero ut punctum reale ρ sit in recta reali trianguli.

Iam vero si in $\mathfrak{F}_3$ sita est recta punctata, apparet planum reale, quod per eam duci potest, secare superficiem praeterea in recta punctata illi conjuncta et in recta reali, nam curva *realis* tertii ordinis non aliter rectam punctatam continere potest nisi est dissoluta in rectam realem duasque conjunctas punctatas (id quod aut ex algebraica aequatione aut ex geometrica intuitione facillime intelligitur). Ex hac re consequitur, si casus singulares rejicimus ac de casu generali loquimur, neutram ex rectis vw esse posse punctatam. Nam si ex. c. v esset punctata, planum reale per v ductum secaret $\mathfrak{F}_3$ in recta reali et in conjuncta punctata, quae ipsa quoque per ρ proficisceretur. Itaque *per* ρ *proficiscerentur tres rectae, quod non potest esse in casu generali.* Itaque si de casu generali loquimur constat rectas v,v esse imaginarias.

Possunt ergo in superficie $\mathfrak{F}_3$ esse 5 genera triangulorum

1) planum reale; tres rectae reales;
2) planum reale; una recta realis, duae punctatae et conjunctae;
3) planum imaginarium; una recta realis; reliquae imaginariae;
4) planum imaginarium; rectae punctatae, tria puncta realia earum in eadem recta;
5) planum imaginarium; una recta punctata, reliquae imaginariae.

Ex hac re primum cognoscimus, *in unaquaque superficie reali* $\mathfrak{F}_3$ *unam rectam realem inesse.* Nam triangulum quodlibet est aut ex genere 1, 2, 3, continet igitur ipse rectam realem; aut ex genere 4, 5, continet igitur rectam punctatam, et certe planum reale per illam ductum continet rectam realem.

§ 23. Iam harum rerum ope superficies paullo accuratius disquirere possumus.

1) *Si in* $\mathfrak{F}_3$ *una tantum recta* (A_1) *est realis,* omnia triangula praeter quinque illa in quibus sita est A_1 esse ex generibus 4 vel 5 elucet, habent igitur in se rectas punctatas. Quum autem unamquamque rectam punctatam superficiei secari a recta reali demonstraverimus, apparet non aliter unam tantum rectam realem in $\mathfrak{F}_3$ esse posse, ac *si omnes 10 rectae, quae per realem illam proficiscuntur sunt punctatae et quidem quinquies binae conjunctae* (itaque 5 triangula in quibus recta realis est sita sunt in planis realibus), *reliquae omnes sunt imaginariae.*

Duae rectae solae reales esse non possunt. Nam si in eodem plano essent, tertia recta ipsa quoque esset realis; sin vero non in eodem plano essent ($A_1 B_1$) certe omnia triangula, quae non alteram illarum rectarum realium continerent, essent e generibus 4 aut 5, ergo continerent rectas punctatas. Quumque omnis recta complexa secet unam rectam realem superficiei formetque cum ea planum reale, consequeretur rectas illas punctatas secare aut A_1 aut B_1, ita ut unum certe triangulum cum recta reali A_1 esset in plano reali. Planum istius trianguli secat rectam B_1 in puncto reali β_1, itaque certe rectae punctatae

quae in illo plano sunt, proficiscuntur per β_1, quare in β_1 se secarent tres rectae superficiei $\mathfrak{F}_3$, id quod non potest fieri in superficie generali.

2) *Si tres rectae sunt reales, primum elucet in eodem plano eas esse cogitandas.* Nam nisi in eodem plano essent (ex. c. $A_1B_1C_1$), hyperboloides quae per eas duci potest secaret $\mathfrak{F}_3$ etiam in tribus rectis $x'y'z'$ alterius catervae, transversalibus primae catervae, quarum una certe esset realis (x'). Itaque cum A_1 et x' se secent neque minus B_1x', C_1x', sequeretur in $\mathfrak{F}_3$ septem rectas esse reales $A_1B_1C_1\,x'\,x_1x_2x_3$, de quo casu postea agetur. *Si in superficie unum triangulum est reale* ($A_1B_2C_3$), constat in $\mathfrak{F}_3$ esse etiam rectas punctatas, quia triangula quae neque A_1 neque B_2 neque C_3 continent, sunt sive ex quarto sive ex quinto genere. Talis recta punctata una cum conjuncta recta proficiscuntur per unam ex rectis realibus $A_1B_2C_3$. Sint exempli causa rectae conjunctae punctatae x_1x' (per A_1 ductae): jam scimus omnes rectas superficiei exceptis iis, quae per A_1 proficiscuntur, secare et alteram ex rectis B_2C_3, et alteram ex rectis x_1x' (confer. § 14, a.).

Ac primum quidem ponimus nullum triangulum in $\mathfrak{F}_3$ constitutum esse tribus punctatis rectis. Inde consequitur omnes rectas, quae non per A_1 sunt ductae, esse imaginarias, tum vero reliquae rectae quae per A_1 proficiscuntur certe sunt punctatae: Istae enim rectae ($y'y_1$, $z'z_1$, B_3z_2), si A_1 exceperis, a rectis imaginariis tantum secantur; quum vero triangula quae ita formantur certe habeant unam rectam punctatam, necesse est, ut rectae $y'y_1$, $z'z_1$, B_3C_2 sint punctatae et binae conjunctae, itaque omnia plana triangulorum, in quibus A_1 est sita, sunt realia. Si his conditionibus satisfit, omnia triangula superficiei respondent conditionibus supra inventis.

Sin vero ponimus esse in $\mathfrak{F}_3$ triangulum ex tribus rectis punctatis compositum ($C_1A_3B_3$), elucet tres rectas $A_3B_1C_2$ quae perficiant cum 6 istis sectionem triedrarum*) esse conjunctas cum $C_1A_3B_3$, ita ut alterum triedrum compositum sit ex planis realibus: $A_1B_3C_2$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_2C_1$ alterum ex uno reali $A_1B_3C_3$ duobusque imaginariis $A_2B_3C_1$; $A_3B_1C_2$ quae se secant secundum rectam realem.

Quaeritur quomodo se habeant reliquae 18 rectae in $\mathfrak{F}_3$ sitae. Facile autem intelligitur, ex istis aut sex esse punctatas, reliquas imaginarias; aut omnes punctatas. Nam in triangulo $x_1y_2z_3$ aut una recta est punctata aut omnes. Si una est punctata exempli causa x_1, consequitur, quia rectae A_1x_1x' formant triangulum, x' esse punctatam conjunctamque rectae x_1; ex contemplatione trianguli A_2x_1x'' consequitur, x'' esse punctatam; ex contemplatione trianguli A_3x_1x''' consequitur, x''' esse punctatam. Tum ex triangulo $B_2x''x_2$ consequitur, x_2 esse punctatam; ex triangulo $C_3x'''x_3$ consequitur, x_3 esse punctatam. Si y_2z_3 imaginariae sunt, plane iisdem contemplationibus invenimus y_1y_3, z_1z_2, $y'y''y'''$, $z'z''z'''$ esse imaginarias; si y_2z_3 punctatae sunt, esse punctatas.

Itaque si in $\mathfrak{F}_3$ unum tantum triangulum est reale, tres possunt esse casus.

a) *Quater binae (8) rectae sunt punctatae et conjunctae* secantque omnes eandem rectam realem; reliquae 16 rectae sunt omnes imaginariae.

*) Confer. § 14, b.

b) Sexies binae (12) rectae sunt punctatae conjunctae, quarum bis binae eandem rectam realem secant formantque cum ea triangula in planis realibus; reliquae 12 omnes sunt imaginariae.

c) Omnes 24 rectae praeter triangulum reale sunt punctatae.

Si plus quam tres rectae reales sunt, numerus rectarum realium est certe impar (ungerade), nam unaquaeque recta realis secat unam ex rectis trianguli realis definitque cum eo planum in quo certe etiam alia recta realis est sita, ita ut praeter triangulum reale semper par numerus rectarum realium sit. Quare nunc nobis disquirendus est

3) Casus in quo 5 rectae reales sunt, quae formant dua triangula cum una recta reali ($A_1 B_2 C_3 B_3 C_2$):

Omnes rectae quae non per A_1 proficiscuntur certe secant alteram ex rectis $B_2 C_3$ et alteram ex rectis $B_3 C_2$; itaque certe secant duas rectas reales; ex qua re intelligimus, istas ipsas non esse posse punctatas si spectamus casum generalem. (Confer ea, quae initio hujus § in parte 1, de rectis punctatis dicta sunt.) Itaque hae omnes imaginariae sunt. Atque ex hac re sequitur, unamquamque rectam [praeter reales illas $B_2 C_3 B_3 C_2$] quae secat rectam A_1 (ex c. x_1) esse punctatam et binas quidem conjunctas, quia omnes rectae, quae eam secant, exceptis A_1 et x', sunt imaginariae, itaque omnia triangula in quibus est x_1 praeter $A_1 x_1 x'$ formantur duabus rectis imaginariis et illa recta x_1, quam igitur punctatam esse intelligimus.

4) Si praeter illas rectas reales duae aliae sunt reales (nec plures), demonstrari potest has novas rectas (quas se secare scimus) per rectam A_1, quae erat transversalis reliquarum 4 rectarum, proficisci; nam nisi per A_1 proficiscerentur in $\mathfrak{F}_3$ essent tria triangula ex realibus rectis constituta, quorum duo nullam haberent rectam communem, ex qua re consequeretur si quis respicit ea, quae § 14, *b* et 22, A dicta sunt, in superficie esse sectionem duorum triedrorum ex realibus planis constitutorum, itaque ad minimum 9 rectas reales.

Quare agimus de eo casu, in quo septem rectae sunt reales formantque tria triangula quibus una recta x_1 communis est (ex c. $A_1 x_1 x'$, $y_1 y'$, $z_1 z'$). Tum vero ex aequa ratione atque in casu 4 apparet, omnes rectas, quae non per A_1 proficiscuntur esse imaginarias, bis binas autem illas quae praeter reales per A_1 proficiscuntur esse punctatas conjunctasque. Iam si duae aliae rectae reales essent, demonstrari posset semper in superficie esse sectionem duorum triedrorum ex realibus planis constitutorum. Nisi enim hae novae duae rectae quae se secant per A_1 proficiscuntur, id iam consequitur ex iis quae initio hujus quartae partis paragraphi diximus. Sin autem ipsae quoque per A_1 proficiscuntur, varium in modum ex octo rectis quae secant A_1 quatuor eligi possunt, quae se invicem non secant (si quidem ex binis quae se secant altera tantum eligitur). Tales quatuor rectae quum unam habeant transversalem realem A_1, certe habent etiam alteram transversalem realem. Ista vero quum habeat in se quatuor puncta in quibus secat quatuor illas rectas, quae igitur sunt puncta superficiei $\mathfrak{F}_3$, est certe una ex 27 rectis, et quum secare non possit

rectam A_1, ex iis quae supra dicta sunt elucet, novem rectas reales esse in $\mathfrak{F}_3$ quae formant sectionem triedrorum.

5) Jam restant casus in quibus 9 rectae, quae efficiunt sectionem duorum triedrorum sunt reales.

Nominamus eas 9 rectas
$$\begin{matrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{matrix}$$
unaquaeque ex reliquis 18 rectis est recta alterius catervae hyperboloidis ductae per tres rectas ex novem illis ita electas ut non se secent (conf. § 14). Quum autem in hyperboloide nullae sint rectae punctatae, sed solae imaginariae et reales (§ 20, 1) etiam in superficie $\mathfrak{F}_3$ rectae punctatae esse non possunt. Iam vero hyperboloides $A_1 B_1 C_1$ secat $\mathfrak{F}_3$ etiam in rectis $x'y'z'$ alterius catervae, quarum aut una recta est realis, aut tres (id quod consequitur ex legibus algebraicis notissimis).

a) Sit una realis x', reliquae imaginariae $(y'z')$. Contemplatione triangulorum $A_1 x' x_1$, $A_1 y' y_1$, $A_1 z' z_1$ consequitur x_1 esse realem, $y_1 z_1$ esse imaginarias. Contemplatione triangulorum $A_2 x_1 x''$, $A_3 x_1 x'''$ consequitur $x'' x'''$ esse reales, contemplatione triangulorum $B_1 x' x_2$, $C_1 x' x_3$ consequitur $x_2 x_3$ esse reales. Iamque contemplatione triangulorum $x'' y' z'''$, $x'' y''' z'$, $x''' y'' z'$, $x''' y' z''$ consequitur $z''' y'''$, $y'' z''$ esse imaginarias; eodem modo contemplatione triangulorum: $x_2 y_1 z_3$, $x_2 y_3 z_1$, $x_3 y_2 z_1$, $x_3 y_1 z_2$ demonstratur $z_3 y_3$, $y_2 z_2$ esse imaginarias. Videmus igitur in hoc casu 15 rectas esse reales, quarum quaeque a ter binis realibus atque a bis binis imaginariis secatur.

b) Si $y'z'$ fuissent reales, contemplatio eorundem triangulorum demonstrasset, omnes 27 rectas esse reales.

§ 24. Nunc autem methodo analytica disquiramus, utrum omnes illi casus re vera existant, necne. Ex iis quae in § 23 invenimus elucet in unaquaque superficie generali reali $\mathfrak{F}_3$ unam minime rectam esse realem A_1 atque inter triangula, quorum latus est A_1, semper complura esse in plano reali sita. Si eligimus duo ex istis triangulis (5 igitur rectas) ac praeterea rectam quamlibet, quae non secat A_1, scimus his 6 rectis definitas esse eas tres rectas, quae cum illis efficiunt sectionem triedrorum (confer. § 14, notatio), atque utrumque triedrum continere unum certe planum reale (scilicet plana illorum triangulorum, quos elegimus). Itaque si literis Germanis functiones reales linearias coordinatarum xyz indicari velimus, functiones autem complexas linearias literis Romanis, utrumque triedrum habet aequationem formae I) $\mathfrak{p} q u = 0$, II) $\mathfrak{p}_1 q_1 u_1 = 0$. Videmus ergo unamquamque superficiem generalem realem tertii ordinis exprimi posse aequatione formae:

$$\mathfrak{p} q u + l \mathfrak{p}_1 q_1 u_1 = 0$$

in qua l est constans arbitraria complexa. Quum vero triangulum superficiei cujus planum est reale ($\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$) sit aut ex genere 1 aut ex genere 2 (§ 22), apparet aequationibus $\mathfrak{p} = 0$, $q_1 u_1 = 0$ et $\mathfrak{p}_1 = 0$, $q u = 0$ exprimi aut duas rectas reales aut duas rectas punctatas et conjunctas. Quare forma functionum q et u, q_1 et u_1 non est omnino arbitraria.

A. Aequationes $qu = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$ exprimant duas rectas reales i. e. si $q = \mathfrak{q} + \mathfrak{r} i$, $u = \mathfrak{u} + \mathfrak{v} i$ rectae

$$\left.\begin{matrix} \alpha) & \mathfrak{p}_1 = 0, & \mathfrak{q} + \mathfrak{r} i = 0 \\ \beta) & \mathfrak{p}_1 = 0, & \mathfrak{u} + \mathfrak{v} i = 0 \end{matrix}\right\} \text{ sunt reales,}$$

quod non potest esse nisi $\mathfrak{r} = \alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{v} = \gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1$ in quibus $\alpha\beta\gamma\delta$ sunt constantes reales quae possunt etiam fieri $= 0$.

Quare $\mathfrak{p}qu$ fit $= \mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)]$.

B. Aequationes

$$\mathfrak{p}_1 = 0,\ qu = 0 \text{ exprimant duas rectas conjunctas}$$
$$q = \quad + \mathfrak{r}i$$
$$u = \mathfrak{u} + \mathfrak{v}i.$$

Ut recta $(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}i) = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$ sit conjuncta rectae $\mathfrak{p}_1 = 0$, $\mathfrak{q} + \mathfrak{r}i = 0$ necesse est ut planum $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}i = 0$ secet planum $\mathfrak{p}_1 = 0$ eadem recta qua $\mathfrak{q} - \mathfrak{r}i = 0$ secat planum $\mathfrak{p}_1$ vel ut

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{v}i = a\mathfrak{p}_1 + b(\mathfrak{q} - \mathfrak{r}i)$$

in qua aequatione a et b sunt constantes complexae quarum a (non b) potest fieri $= 0$ et

$$\mathfrak{p}qu \text{ fit } b\mathfrak{p}\,(\mathfrak{q} + \mathfrak{r}i)\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{r}i + \frac{a}{b}\,\mathfrak{p}_1).$$

Eodem modo $\mathfrak{p}_1 q_1 u_1$ fit aut $= \mathfrak{p}_1[\mathfrak{q}_1 + i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})]\cdot[\mathfrak{u}_1 + i(\gamma_1\mathfrak{q}_1 + \delta_1\mathfrak{p}_1)]$

$$\text{aut} = b_1\mathfrak{p}_1\,(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i)\,(\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i + \frac{a_1}{b_1}\,\mathfrak{p}).$$

Quare videmus

1) Si in superficie generali $\mathfrak{F}_3$ sita est recta realis, quae est communis duobus triangulis in planis realibus $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$, et si utrumque triangulum constitutum est rectis realibus, aequatio superficiei reduci potest in formam:

$$\mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + l\mathfrak{p}_1\,[\mathfrak{q}_1 + i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{u}_1 + i\,(\gamma_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0.$$

2) Si in superficie generali $\mathfrak{F}_3$ sita est recta realis, quae est communis duobus triangulis in planis realibus $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{q}_1 = 0$, et si alterum triangulum constitutum est rectis realibus, alterum una recta reali ($\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$) duobusque rectis punctatis et conjunctis, aequatio superficiei reduci potest in formam

$$\mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + lb_1\mathfrak{p}_1[\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i][\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i + \frac{a_1}{b_1}\mathfrak{p}] = 0.$$

3) Si in superficie generali $\mathfrak{F}_3$ sita est recta realis, quae est communis duobus triangulis in planis realibus $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$, et si utrumque triangulum constitutum est una recta reali ($\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$) duobusque punctatis et conjunctis, aequatio superficiei redigi potest in formam

$$b\mathfrak{p}(\mathfrak{q} + \mathfrak{r}i)\,(\mathfrak{q} - \mathfrak{r}i + \frac{a}{b}\,\mathfrak{p}_1) + lb_1\mathfrak{p}(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i)\,(\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i + \frac{a_1}{b_1}\mathfrak{p}_1) = 0.$$

Hae aequationes in casu generali exprimunt superficies imaginarias, quum vero superficies reales omnes aut uni aut compluribus conditionum 1, 2, 3 sufficiant apparet non existere superficiem realem, quae non una ex illis formis possit exprimi. Iam quaeritur quibus conditionibus aequationes 1, 2, 3 sint superficierum realium. Conditio qua $F(xyz) = 0$ est aequatio superficiei realis, est $F(xyz) = k\,\mathfrak{F}(xyz)$; si k est constans quidam complexus, $\mathfrak{F}(xyz)$ functio realis valorum xyz; ita ut $\dfrac{F(xyz)}{k} = \mathfrak{F}(xyz)$.

Quare si quaeritur quibus conditionibus aequationes 1, 2, 3 sint reales, multiplicemus eas in constantem complexum $\frac{1}{k} = m = \mathfrak{m} + \mu i$, videamusque, quibusnam conditionibus pars imaginaria sit $= 0$ identice.

I) Prima aequatio fit, si ponimus $lm = n = \mathfrak{n} + \nu i$

$$(\mathfrak{m} + \mu i)\,\mathfrak{p}\,[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + (\mathfrak{n} + \nu i)\,\mathfrak{p}_1[\mathfrak{q}_1 + i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{u}_1 + i(\gamma_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0.$$

$$(\mathfrak{m} + \mu i)\,[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)] = (\mathfrak{m} - \mu\alpha)\,\mathfrak{q} - \mu\beta\mathfrak{p}_1 + i[(\mu + \mathfrak{m}\alpha)\,\mathfrak{q} + \mathfrak{m}\beta\mathfrak{p}_1].$$

Itaque si ponimus $(\mathfrak{m} - \mu\alpha)\,\mathfrak{q} - \mu\beta\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_0$

$$(\mu + \mathfrak{m}\alpha)\,\mathfrak{q} + \mathfrak{m}\beta\mathfrak{p}_1 \text{ fit} = \frac{\mathfrak{m} + \mu\alpha}{\mathfrak{m} - \mu\alpha}\,\mathfrak{q}_0 + \left(\mathfrak{m}\beta + \mu\beta\,\frac{\mathfrak{m} + \mu\alpha}{\mathfrak{m} - \mu\alpha}\right)\mathfrak{p}_1.$$

Iam ponimus

$$\frac{\mathfrak{m} + \mu\alpha}{\mathfrak{m} - \mu\alpha} = \alpha', \quad \mathfrak{m}\beta + \mu\beta\,\frac{\mathfrak{m} + \mu\alpha}{\mathfrak{m} - \mu\alpha} = \beta',$$

ita ut primum membrum sinistrae partis fiat:

$$\mathfrak{p}\,[\mathfrak{q}' + i(\alpha'\mathfrak{q}' + \beta'\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)].$$

Quum eundem in modum secundum membrum transformare possimus, videmus aequationem nostram reduci posse in formam

$$\mathfrak{p}[\mathfrak{q}' + i(\alpha'\mathfrak{q}' + \beta'\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1] + \mathfrak{p}_1[\mathfrak{q}'_1 + i(\alpha'_1\mathfrak{q}'_1 + \beta'_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0.$$

In qua jam nunc loco $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'_1$, $\alpha'\beta'$, $\alpha'_1\beta'_1$ ponemus $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$, $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$ ita ut fiat:

A. $$\mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + \mathfrak{p}_1[\mathfrak{q}_1 + i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{u}_1 + i(\gamma_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0$$

cujus pars imaginaria est

B. $$\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}\,(\alpha + \gamma) + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1(\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q}) + \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1(\alpha_1 + \gamma_1) + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1(\beta_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{q}_1) = 0 \text{ ident.}$$

Si $\mathfrak{p}_1 = 0$ ponimus consequitur

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}\,(\alpha + \gamma) = 0.$$

Quare $(\alpha + \gamma)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}$ est aut identice $= 0$, aut habet factorem $\mathfrak{p}_1$; quum autem neque $\mathfrak{p}$ neque $\mathfrak{q}$ neque $\mathfrak{u}$ possint habere factorem $\mathfrak{p}_1$, neque possint esse $= 0$ identice, nisi quod aequatio A sit dissoluta consequitur $\alpha + \gamma = 0$.

Eodem modo si $\mathfrak{p} = 0$ ponimus, invenimus $\alpha_1 + \gamma_1 = 0$ quare aequatio A fit:

C. $$\mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(-\alpha\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + \mathfrak{p}_1[\mathfrak{q}_1 + i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{u}_1 + i(-\alpha_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0$$

ac si substituimus $\alpha + \gamma = 0$, $\alpha_1 + \gamma_1 = 0$ in B, consequitur

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1(\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{q}_1) = 0$$

identice itaque quum neque $\mathfrak{p}$ neque $\mathfrak{p}_1$ possit esse $= 0$

D. $$\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{q}_1 = 0 \text{ identice.}$$

Huic conditioni varium in modum satisfit

1) si simul $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\beta_1 = 0$, $\delta_1 = 0$
id quod efficit ut aequatio habeat formam

α) $$(1 + \alpha^2)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u} + (1 + \alpha_1{}^2)\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1 = 0$$

2) Tres ex constantibus $\beta\delta\,\beta_1\delta_1$ non possunt esse $= 0$, ita ut quartus non sit $= 0$, quia id efficeret, ut una ex functionibus $\mathfrak{u}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u}_1\mathfrak{q}_1$ esset $= 0$ identice, et ut propterea aequatio C esset dissoluta.

3) Duo ex constantibus $= 0$, reliquae non $= 0$. Hoc ita solum potest fieri, ut sint aut simul $\beta = 0$, $\delta = 0$, aut simul $\beta_1 = 0$, $\delta_1 = 0$.

Nam si esset ex. c. simul $\beta = 0$, $\delta_1 = 0$, aequatio D fieret $\delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1 = 0$, itaque $\mathfrak{u}_1 = \frac{-\delta\mathfrak{q}}{\beta_1}$ et aequatio C esset dissoluta.

Si vero $\beta = 0$, $\delta = 0$, itaque $\beta_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{q}_1 = 0$, aequatio C habet formam

$$\beta)\quad (1 + \alpha^2)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u} - \frac{\delta_1}{\beta_1}\mathfrak{p}[\mathfrak{q}_1 + i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{q}_1 - i(\alpha_1\mathfrak{q}_1 + \beta_1\mathfrak{p})] = 0.$$

(Conditio $\beta_1 = 0$, $\delta_1 = 0$ eandem praestat formam).

4) Si unus ex constantibus $\beta\delta$, $\beta_1\delta_1$ est $= 0$ primum constat quum valores β, δ_1, β_1, δ_1 omnino eandem habeant vim, nos, si unum tantum valorem $\beta_1 = 0$ fieri posse admittimus, tamen omnes formas invenire, Iamque istum casum una cum eo casu respicere possumus in quo omnes constantes non sunt $= 0$, quum dicamus conditionem quae jam existit esse

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{-\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1}{\delta_1}$$

in qua β_1 fieri potest $= 0$, nunquam β vel δ vel δ_1.

Tum aequatio C habet formam:

$$\gamma)\quad \mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(-\alpha\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] - \frac{\mathfrak{p}_1}{\delta_1}\{\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1 + i[\alpha_1(\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1) + \beta_1\delta_1\mathfrak{p}]\}\,[\mathfrak{u}_1 + i(-\alpha_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0$$

quae si $\beta = 0$, transit in formam

$$\delta)\quad (1 + i\alpha)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,[\mathfrak{u} + i(-\alpha\mathfrak{q} + \delta\mathfrak{p}_1)] + \frac{\mathfrak{p}_1}{\delta_1}[\delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1 + i(\alpha_1(\delta\mathfrak{q} + \beta_1\mathfrak{u}_1) + \beta_1\delta_1\mathfrak{p})]\,[\mathfrak{u}_1 + i(-\alpha_1\mathfrak{u}_1 + \delta_1\mathfrak{p})] = 0.$$

II. Jam disquiramus aequationem 2, quam si multiplicamus in $m = \mathfrak{m} + \mu i$ ac respicimus transformationem in I factam obtinemus aequationem formae:

$$\text{A.}\quad \mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)]\,[\mathfrak{u} + i(\gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + (\varkappa + \lambda i)\,\mathfrak{p}_1\,[\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i]\,[\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i + (\alpha_1 + \beta_1 i)\mathfrak{p}] = 0$$

(in qua posuimus $\varkappa + \lambda i$ pro $m l b$, $\alpha_1 + \beta_1 i$ pro $\frac{a_1}{b_1}$).

Pars imaginaria est

$$\text{B.}\quad \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}\,(\alpha + \gamma) + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\,(\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q}) + \mathfrak{p}_1\lambda(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\,[\lambda\,(\mathfrak{q}_1\alpha_1 - \mathfrak{r}_1\beta_1) + \varkappa(\mathfrak{q}_1\beta_1 + \mathfrak{r}_1\alpha_1)] = 0.$$

Ponimus $\mathfrak{p}_1 = 0$, consequitur $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}(\alpha + \gamma) = 0$ (id.) quumque neque $\mathfrak{p}$ neque $\mathfrak{q}$ vel possit habere factorem $\mathfrak{p}_1$ vel possit esse $= 0$, consequitur $\alpha + \gamma = 0$; Ponimus $\mathfrak{p} = 0$: consequitur $\mathfrak{p}_1\lambda(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$, quod non potest esse nisi $\lambda = 0$ (nam sive $\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2$ esset $= 0$, sive $\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2$ haberet factorem $\mathfrak{p}_1$ aequatio esset dissoluta) jam si ponimus $\alpha + \gamma = 0$, $\lambda = 0$, aequatio B fit

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\,[\beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \varkappa\,(\beta_1\mathfrak{q}_{-} + \alpha_1\mathfrak{r}_1)] = 0$$

vel quum neque $\mathfrak{p}$ neque $\mathfrak{p}_1$ possint fieri 0

$$\text{C.} \quad \beta\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{q} + \varkappa(\beta_1\mathfrak{q}_1 + \alpha_1\mathfrak{r}_1) = 0.$$

Et aequatio A fit

$$\text{D.} \quad \mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)][\mathfrak{u} + i(-\alpha\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{p}_1)] + \varkappa\mathfrak{p}_1[(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i)(\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i) + (\alpha_1 + \beta_1 i)\mathfrak{p}_1)] = 0.$$

Conditioni C varium in modum satisfit. Nunquam vero possumus ponere sive $\varkappa$ esse $= 0$, sive $\mathfrak{u} = 0$, sive $\mathfrak{q} = 0$ (identice); quum id efficeret, ut aequatio esset dissoluta; neque potest $\mathfrak{q}_1 = 0$ vel $\mathfrak{r}_1 = 0$ (id.), quum id efficeret, ut aequatio non differat ab ea de qua in I egimus.

Restant igitur hi casus

$$1) \quad \beta = 0, \; \delta = 0, \; \beta_1 = 0, \; \alpha_1 = 0$$

tum aequatio fit:

$$\varepsilon) \quad 1 + \alpha^2)\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u} + \varkappa\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0.$$

Tres ex constantibus $\beta\delta\beta_1\alpha_1$ non possunt esse $= 0$, quia id efficeret, ut una ex functionibus $\mathfrak{u}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1$ esset $= 0$ identice (aequatione *B*) quod non potest fieri.

Ex casibus, in quibus duo ex constantibus sunt 0, is, in quo $\beta = 0$, $\delta = 0$, itaque $\beta_1\mathfrak{q}_1 + \alpha_1\mathfrak{r}_1 = 0$ (id), efficit, ut aequatio habeat formam quam sub I tractavimus. Si reliquos casus disquirimus non necesse est ut β valorem 0 habere concedamus, quum casus in quo $\delta = 0$ plane easdem formas praestet quam in quo $\beta = 0$. Quare in omnibus istis casibus est

$$2) \quad \mathfrak{u} = \frac{-\delta\mathfrak{q} + \varkappa(\beta_1\mathfrak{q}_1 + \alpha_1\mathfrak{r}_1)}{\beta}$$

et aequatio fit

$$\zeta) \quad \frac{\mathfrak{p}}{\beta}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)][-\delta\mathfrak{q} + \varkappa(\beta_1\mathfrak{q}_1 + \alpha_1\mathfrak{r}_1) + i[-\alpha\{\delta\mathfrak{q} + \varkappa(\beta_1\mathfrak{q}_1 + \alpha_1\mathfrak{r}_1)\} + \delta\beta\mathfrak{p}_1]] + \varkappa\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i)[(\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i) + (\alpha_1 + \beta_1 i)\mathfrak{p}] = 0.$$

Inter casus quae hac forma exprimuntur, is est insignis in quo $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$; tum fit aequatio

$$-\frac{\delta}{\beta}\mathfrak{p}[\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)][\mathfrak{q} - i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)] + \varkappa\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i)(\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i) = 0$$

vel:

$$\eta) \quad -\frac{\delta}{\beta}\mathfrak{p}[\mathfrak{q}^2 + (\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1)^2] + \varkappa\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$$

III. Si aequatio habet formam 3, intelligimus eam in *m* multiplicatam fieri, si ponimus $mb = (\varkappa + \lambda i)$, $\frac{a}{b} = \alpha + \beta i$, $mlb_1 = (\varkappa_1 + \lambda_1 i)$, $\frac{a_1}{b_1} = \alpha_1 + \beta_1 i$:

$$\text{A.} \quad (\varkappa + \lambda i)\mathfrak{p}(\mathfrak{q} + \mathfrak{r}i)[\mathfrak{q} - \mathfrak{r}i + (\alpha + \beta i)\mathfrak{p}_1] + (\varkappa_1 + \lambda_1 i)\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i)[\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{r}_1 i + (\alpha_1 + \beta_1 i)\mathfrak{p}] = 0$$

cujus pars imaginaria est

$$\text{B.} \quad \mathfrak{p}\lambda(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1[\lambda(\mathfrak{q}\alpha - \mathfrak{r}\beta) + \varkappa(\mathfrak{q}\beta + \mathfrak{r}\alpha)] + \mathfrak{p}_1\lambda_1(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1[\lambda_1(\mathfrak{q}_1\alpha_1 - \mathfrak{r}_1\beta_1) + \varkappa_1(\mathfrak{q}_1\beta_1 + \mathfrak{r}_1\alpha_1)] = 0 \text{ (id.).}$$

Eodem modo quo antea, demonstratur $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$ esse.

Quare aequatio B fit, quum $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ non possit esse $= 0$

$$\text{C.} \quad \varkappa(\mathfrak{q}\beta + \mathfrak{r}\alpha) + \varkappa_1(\mathfrak{q}_1\beta_1 + \mathfrak{r}_1\alpha_1) = 0$$

et aequatio superficiei fit

D. $\varkappa\mathfrak{p}(\mathfrak{q}+\mathfrak{r}i)[\mathfrak{q}-\mathfrak{r}i+(\alpha+\beta i)\mathfrak{p}_1]+\varkappa_1\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1+\mathfrak{r}_1 i)[\mathfrak{q}_1-\mathfrak{r}_1 i+(\alpha_1+\beta_1 i)\mathfrak{p}]=0.$

Conditioni C varium in modum satisfit. (Functionum $\mathfrak{q}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_1\mathfrak{q}$ nulla potest fieri $=0$ identice, quia id efficeret, ut aequatio haberet formam, quam iam tractavimus (II sive I). Praeterea intelligimus neque $\varkappa$ neque $\varkappa_1$ esse $=0$. Potest autem satisfieri aequationi C ita, ut $\beta=0$, $\alpha=0$, $\beta_1=0$, $\alpha_1=0$.

In isto casu superficies habet aequationem

$$\text{D.}\quad \varkappa\mathfrak{p}(\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2)+\varkappa_1\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1^2+\mathfrak{r}_1^2)=0.$$

Tres ex constantibus $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$ non possunt fieri $=0$, ita ut quarta non sit $=0$, quia id efficeret, ut una ex functionibus $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1$ esset $=0$ (id).

Si simul $\alpha=0$, $\beta=0$, quum α_1 et β_1 non sint 0, aequatio praestat casum specialem earum aequationum quas sub II tractavimus.

Reliquas formas omnes una formula complecti possumus quum ponamus

$$\mathfrak{q}_1=\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\varkappa\alpha)+\varkappa_1\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}.$$

(Eum casum enim, ut $\beta_1=0$ sit, negligere possumus, quia non dat novam formam.) Quare aequatio fit:

$$\iota)\ \varkappa\mathfrak{p}(\mathfrak{q}+\mathfrak{r}i)[\mathfrak{q}-\mathfrak{r}i+(\alpha+\beta i)\mathfrak{p}_1]+\varkappa_1\mathfrak{p}_1\left[\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa_1\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}+\mathfrak{r}_1 i\right]$$
$$\cdot\left[\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa_1\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}-\mathfrak{r}_1 i+(\alpha_1+\beta_1 i)\mathfrak{p}\right]=0.$$

Constat igitur ex iis quae praecedunt, omnes superficies reales $\mathfrak{F}_3$ aequationes habere, quae in unam sive plures ex formis α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι reduci possunt.

Cognoscimus autem formam β esse casum specialem et formae γ, et formae ε; formam η casum specialem esse et formae ζ et formae ϑ, quare istas quidem formas negligere poterimus.

§ 25. Iam disquiramus, quaenam superficies singulis formis exprimi possint, ita quidem ut primum simpliciores formas (α, ε, ϑ), deinde reliquas contemplemur.

I. Superficies, quarum aequatio potest reduci in formam α

$$(1+\alpha^2)\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}_1+(1+\alpha_1^2)\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1=0.$$

vel si ponimus

$$\frac{1+\alpha_1^2}{1+\alpha_2}\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}'_1.$$
$$\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}+\mathfrak{p}'_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1=0$$

continent novem rectas reales quae efficiunt sectionem triedrorum $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u}=0$, $\mathfrak{p}'_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1=0$; ex hac re apparet istas superficies esse aut ex genere 5 a (15 rectae reales, 12 imaginariae) aut ex genere 5 b (27 rectae reales).

Et facile demonstratur, re vera utrumque casum exstare.

Istae superficies enim generantur exempli causa tribus fascibus duploprojectivis $\mathfrak{p}+\lambda\mathfrak{p}'_1=0$, $\mathfrak{q}+\mu\mathfrak{q}_1=0$, $\mathfrak{u}+\nu\mathfrak{u}_1=0$, si λ, μ, ν, juncta sunt relatione $\lambda\mu\nu=1$, cognoscimusque eos esse fasces reales a quibus initio profecti sumus; quare si ponimus fascem $\mathfrak{p}+\lambda_1\mathfrak{p}'_1=0$, qui habet eandem axem atque $\mathfrak{p}+\lambda\mathfrak{p}'_1=0$, et qui est projectivus illi, ita ut existet relatio

$$1)\quad \mathfrak{a}\lambda\lambda_1+\mathfrak{b}\lambda+\mathfrak{c}\lambda_1+\mathfrak{d}=0,$$

in qua $\mathfrak{abcd}$ sunt constantes reales; apparet etiam hunc fascem cum fascibus $\mathfrak{q} + \mu\mathfrak{q}_1 = 0$, $\mathfrak{u} + \nu\mathfrak{u}_1 = 0$ conjunctum esse duploprojective, ita ut tres illi fasces generent superficiem tertii ordinis $\mathfrak{F}'_3$, suntque plana principalia fascis $\mathfrak{p} + \lambda_1\mathfrak{p}'_1 = 0$ ea, quae respondent relatione 1 planis $\mathfrak{p} + \lambda\mathfrak{p}'_1 = 0$, si $\lambda = 0$, et si $\lambda = \infty$. Nominamus $\lambda_{1,0}$ eum valorem, quem obtinet λ_1, si $\lambda = 0$; $\lambda_{1,\infty}$ eum, quem obtinet λ si $\lambda = \infty, \left(\frac{1}{\lambda} = 0\right)$, quare $\mathfrak{p} + \lambda_{1,1}\mathfrak{p}'_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\infty}\mathfrak{p}'_1 = 0$, sunt plana principalia fascis $\mathfrak{p} + \lambda_1\mathfrak{p}'_1 = 0$.

Itaque haec superficies in se habet sectionem triedrorum

$$(\mathfrak{p} + \lambda_{1,0}\mathfrak{p}'_1)\,\mathfrak{q}\mathfrak{u} = 0, \quad (\mathfrak{p} + \lambda_{1,\infty}\mathfrak{p}'_1)\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1 = 0$$

(9 rectas reales).

Apparetque planum $\mathfrak{p} + \lambda_1\mathfrak{p}'_1 = 0$ secare superficiem $\mathfrak{F}_3$ praeter in axi in conica, cujus altera aequatio est: $\lambda\mathfrak{q}\mathfrak{u} - \mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1 = 0$ (hyperboloides).

Iam vero possumus constantes ita eligere ut valores numeri λ_1: $\lambda_{1,\alpha}$, $\lambda_{1,\beta}$, $\lambda_{1,\gamma}$ quae respondent aequatione 1, valoribus realibus numeri λ: λ_α, λ_β, λ_γ efficiant, ut $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\alpha}\mathfrak{p}_1 = 0$ sit planum tangens superficiem respondentem $\lambda_\alpha\mathfrak{q}\mathfrak{u} - \mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1 = 0$ etc. (nam aequationibus

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\lambda_\alpha\lambda_{1,\alpha} + \mathfrak{b}\lambda_\alpha + \mathfrak{c}\lambda_{1,\alpha} + \mathfrak{d} = 0\\ \mathfrak{a}\lambda_\beta\lambda_{1,\beta} + \mathfrak{b}\lambda_\beta + \mathfrak{c}\lambda_{1,\beta} + \mathfrak{d} = 0\\ \mathfrak{a}\lambda_\gamma\lambda_{1,\gamma} + \mathfrak{b}\lambda_\gamma + \mathfrak{c}\lambda_{1,\gamma} + \mathfrak{d} = 0\end{aligned}$$

semper satisfieri potest uno systemate valorum $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}, \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}, \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$).

Tum vero recta $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$ secatur ab 10 rectis realibus, suntque plana in quibus binae illarum sunt sitae:
$\mathfrak{p} + \lambda_{1,1}\mathfrak{p}'_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\infty}\mathfrak{p}'_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\alpha}\mathfrak{p}'_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\beta}\mathfrak{p}'_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \alpha_{1,\gamma}\mathfrak{p}'_1 = 0$, ex qua re consequitur istam **superficiem $\mathfrak{F}_3$ continere 27 rectas** (5b).

Possumus autem etiam constantes reales $\mathfrak{abcd}$ ita eligere, ut valor realis $\lambda_{1,\alpha} = \lambda_1$ respondeat valori $\lambda_\alpha = \lambda$, et valor complexus $\lambda_{1,\beta} = l_{1,\beta} + il_{1,\beta} = \lambda_1$ respondeat valori $\lambda : \lambda_\beta = l_\beta + il_\beta$ (aequatione 1) et ut plana $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\alpha}\mathfrak{p}'_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_{1,\beta}\mathfrak{p}'_1 = 0$ sint plana tangentia superficies respondentes $\lambda_\alpha\mathfrak{q}\mathfrak{u} - \mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1 = 0$, $\lambda_\beta\mathfrak{q}\mathfrak{u} - \mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1 = 0$, si quidem constantes $\mathfrak{a\,b\,c\,d}$ his conditionibus subjicimus

$$\text{A.}\quad \begin{aligned}\mathfrak{a}\lambda_\alpha\lambda_{1,\alpha} + \mathfrak{b}\lambda_\alpha + \mathfrak{c}\lambda_{1,\alpha} + \mathfrak{d} = 0\\ \mathfrak{a}\lambda_\beta\lambda_{1,\beta} + \mathfrak{b}\lambda_\beta + \mathfrak{c}\lambda_{1,\beta} + \mathfrak{d} = 0.\end{aligned}$$

Quum enim $\mathfrak{abcd}$ reales esse velimus, aequatio secunda duas continet conditiones:

$$\begin{aligned}&\text{B.}\quad \mathfrak{a}\,(l_\beta l_{1,\beta} - \mathfrak{l}_\beta\mathfrak{l}_{1,\beta}) + \mathfrak{b}l_\beta + \mathfrak{c}l_{1,\beta} + \mathfrak{d} = 0.\\ &\text{C.}\quad \mathfrak{a}\,(l_\beta\mathfrak{l}_{1,\beta} + \mathfrak{l}_\beta l_{1,\beta}) + \mathfrak{b}\mathfrak{l}_\beta + \mathfrak{c}\mathfrak{l}_{1,\beta} = 0.\end{aligned}$$

Atque aequationibus ABC unum systema valorum $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}, \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}, \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$ definitur. Tum superficies $\mathfrak{F}'_3$ continet rectas imaginarias. Itaque haec est **superficies quae continet 15 rectas reales, 12 imaginarias** (5, a).

II. Omnes superficies generales, quarum aequationes formam habere possunt ε, quae fit si ponimus $\frac{\varkappa}{1 + \alpha_2}\,\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1$:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u} + \mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0.$$

in se habent novem rectas, quarum tres sunt reales, 6 punctatae (binae conjunctae), quae sunt sectio triedri $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{u} = 0$ et triedri $\mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$.

Ex hac re cognoscimus omnes istas superficies esse aut ex genere 2b, aut ex genere 2c (§ 23), itaque continere unum triangulum ex realibus rectis constitutum ac praeterea aut 12 rectas punctatas (binas conjunctas) aut 24 punctatas; hos duos casus re vera existere omnino eundem in modum demonstrari potest atque in I. [Quum enim hic loco hyperboloidium simplicium ($\lambda \mathfrak{q}\mathfrak{u} - \mathfrak{q}_1\mathfrak{u}_1) = 0$ sint ellipsoides sive hyperboloides duplices $\lambda \mathfrak{q}\mathfrak{u} - (\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$, plana tangentia realia eas secant in binis rectis punctatis et conjunctis.]

III. Iam disquirendae sunt superficies, quarum aequationes reduci possunt in formam D, vel si pro $\mathfrak{p}_1 \frac{\varkappa_1}{\varkappa}$ ponimus $\mathfrak{p}_1$ in formam:

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) + \mathfrak{p}_1(\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) + 0.$$

Planum $\mathfrak{p} + \lambda\mathfrak{p}_1 = 0$ secat superficiem illam in conica cujus altera aequatio est

$$\lambda(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) - (\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$$

quae quidem conica quinquies dissolvitur si $\lambda = 0$, si $\lambda = \infty$, et ter si λ tales habet valores, ut planum $\mathfrak{p} + \lambda\mathfrak{p}_1 = 0$ tangat superficiem $\lambda(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) - (\mathfrak{q}_1^2 + {}_1^2) = 0$. Nominamus istos valores $\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma$.

Quum in casu generali, de quo agimus plana $\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{r} = 0$, $\mathfrak{q}_1 = 0$, $\mathfrak{r}_1 = 0$ non per idem punctum proficiscantur, ista superficies $\lambda(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) + (\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$ non potest esse conus, quumque contineat rectas imaginarias ex e. rectam $\mathfrak{q} + \mathfrak{r}i = 0$, $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i = 0$, non potest habere rectas punctatas, si μ est realis. Confer § 20.

Itaque si $\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma$ sunt reales, plana $\mathfrak{p} + \lambda_\alpha\mathfrak{p}_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_\beta\mathfrak{p}_1 = 0$, $\mathfrak{p} + \lambda_\gamma\mathfrak{p}_1 = 0$ non possunt secare $\mathfrak{F}_3$ secundum rectas punctatas, itaque secant eam secundum rectas reales. Quare in hoc casu recta $\mathfrak{p}_1 = 0$, $\mathfrak{p} = 0$ secatur a bis binis rectis complexis atque a ter binis realibus, id quod in solo casu 4 (§ 23) fieri potest, ita ut istae superficies habeant 7 rectas reales.

Sin autem valores $\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma$ non omnes sunt reales, unus tantum potest esse realis λ_α, reliquae λ_β et λ_γ sunt imaginariae. Nam quum non jam omnia 5 plana triangulorum, quorum latus est $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{p}_1 = 0$ sint reales, superficies non jam potest esse ex generibus 1, 2a, 3, 4 et facile intelligitur illam superficiem praestare casum 2b.

Re vera utrumque casum existere eodem modo demonstrari potest atque in I. [Observandum autem est, valores $\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma$ omnino non posse esse negativos reales; nam si λ_α esset negativus,

$$\lambda_\alpha(\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) - (\mathfrak{q}_1^2 + \mathfrak{r}_1^2) = 0$$

esset superficies quae nullum haberet punctum reale, cujus ergo rectae omnes essent imaginariae. Itaque nullum planum reale eam tangere potest, ita ut $\mathfrak{p} + \lambda_\alpha\mathfrak{p}_1 = 0$ non possit esse planum tangentiale.]

IV) Si respicimus superficies, quarum aequationes sunt γ et δ (§ 24), scimus in iis quinque rectas esse reales, quae duo triangula formant. Omnes igitur superficies quarum aequationes possunt reduci in formam γ sive δ, certe non sunt e generibus, 1, 2a, 2b, 2c, quumque habeant rectas imaginarias, non sunt e genere 5b. Sunt igitur aut ex genere 3 aut 4 aut 5a. Superficies quarum aequationes formam habent ζ, in se habent triangulum reale et duas rectas punctatas conjunctas et rectas imaginarias [e. c. $\mathfrak{q} + i(\alpha\mathfrak{q} + \beta\mathfrak{p}_1) = 0$, $(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{r}_1 i) = 0$].

Propterea sunt neque ex genere 1, neque ex 2c neque ex genere 5a vel 5b, sed sunt aut ex 2a, aut ex 2b, 3, 4.

Superficies quarum aequationes formam habent

$$\text{i)}\quad \varkappa\mathfrak{p}(\mathfrak{q}+\mathfrak{r}i)(\mathfrak{q}-\mathfrak{r}i+(\alpha+\beta i)\mathfrak{p}_1)+\varkappa_1\mathfrak{p}_1\left[\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}+\mathfrak{r}_1 i\right]$$
$$\cdot\left[\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}-\mathfrak{r}_1 i+(\alpha_1+\beta_1 i)\mathfrak{p}\right]=0$$

in se habent 9 rectas, quae sunt sectio triedrorum:

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{q}+\mathfrak{r}i)[\mathfrak{q}-\mathfrak{r}i+(\alpha+\beta i)\mathfrak{p}_1]=0$$
$$\mathfrak{p}_1\left[\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}+\mathfrak{r}_1 i\right]\left[\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}-\mathfrak{r}_1 i+(\alpha_1+\beta_1 i)\mathfrak{p}\right]=0$$

inter quas una recta est realis $\mathfrak{p}=0$, $\mathfrak{p}_1=0$, reliquae omnes sunt punctatae (ex. c. recta $\mathfrak{q}+\mathfrak{r}i=0$, $\frac{-\varkappa(\mathfrak{q}\beta+\mathfrak{r}\alpha)+\varkappa_1\alpha_1\mathfrak{r}_1}{\beta_1\varkappa_1}+\mathfrak{r}_1 i=0$, continet punctum reale $\mathfrak{q}=0$, $\mathfrak{r}=0$, $\mathfrak{r}_1=0$ etc.). Quare consequitur omnes superficies, quae exprimi possunt aequatione formae *i* esse aut ex genere 2b aut ex genere 2c.

Atque ex hac re intelligimus omnino non existere superficies, quae praestent sive genus 1 sive 2a sive 3:

Nam unaquaeque superficies, quae esset ex uno istorum generum, haberet rectam realem A_1; et 5 triangula in quibus A_1 esset sita, essent omnes in planis realibus, et ad minimum tria ex istis triangulis haberent praeterea 2 rectas punctatas et conjunctas (confer § 23). In § 24 (3) autem demonstratum est, aequationem talium superficierum semper reduci posse in formam 3; istam vero constat duas tantum formas reales continere, scilicet $\mathfrak{H}$ et *i*. Itaque si existerent superficies generum 1, 2a, 3, aequatio eorum contineretur aequationibus $\mathfrak{H}$ et *i*. Quum autem omnes aequationes formae $\mathfrak{H}$ sint aut ex genere 4, aut ex genere 2b (confer III), et omnes aequationes formae *i* sint aut ex genere 2b, aut ex genere 2c, apparet superficies generum 1, 2a, 3 omnino non existere.

Generales igitur superficies $\mathfrak{F}_3$, si ad rectas spectamus in 5 genera dilabuntur, quae quo facilius dignoscantur jam exemplis de situ et qualitate rectarum additis enumerabimus. Atque utrum recta A realis sit, an punctata, aut imaginaria, indicabimus signis superpositis —, ·, ∘, ita quidem ut $\bar{A}$ significet rectam realem, $\dot{A}$ rectam punctatam, $\mathring{A}$ rectam imaginariam.

Sunt igitur genera superficierum:

A. In quibus omnes rectae sunt reales (5b)

$\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$	$\bar{x}'\ \bar{y}'\ \bar{z}'$
$\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2$	$\bar{x}''\ \bar{y}''\ \bar{z}''$
$\bar{A}_3\bar{B}_3\bar{C}_3$	$\bar{x}'''\bar{y}'''\bar{z}'''$
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	
$\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3$	
$\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$	

B. Superficies, in quibus 15 rectae sunt reales, 12 imaginariae (5a)

$$\begin{array}{c|c} \bar A_1 \bar B_1 \bar C_1 & \bar x' \mathring y' \mathring z' \\ \bar A_2 \bar B_2 \bar C_2 & \bar x'' \mathring y'' \mathring z'' \\ \bar A_3 \bar B_3 \bar C_3 & \bar x''' \mathring y''' \mathring z''' \\ \hline \bar x_1 \bar x_2 \bar x_3 & \\ \mathring y_1 \mathring y_2 \mathring y_3 & \\ \mathring z_1 \mathring z_2 \mathring z_3 & \end{array}$$

C. In quibus tres rectae triangulum formantes sunt reales, reliquae 24 punctatae (2c)

$$\begin{array}{c|c} \bar A_1 \dot B_1 \dot C_1 & \dot x' \dot y' \dot z' \\ \dot A_2 \bar B_2 \dot C_2 & \dot x'' \dot y'' \dot z'' \\ \dot A_3 \dot B_3 \bar C_3 & \dot x''' \dot y''' \dot z''' \\ \hline \dot x_1 \dot x_2 \dot x_3 & \\ \dot y_1 \dot y_2 \dot y_3 & \\ \dot z_1 \dot z_2 \dot z_3 & \end{array}$$

D. In quibus tres rectae triangulum formantes sunt reales, 12 punctatae, 12 imaginariae (2b)

$$\begin{array}{c|c} \bar A_1 \dot B_1 \dot C_1 & \dot x' \mathring y' \mathring z' \\ \dot A_2 \bar B_2 \dot C_2 & \dot x'' \mathring y'' \mathring z'' \\ \dot A_3 \dot B_3 \bar C_3 & \dot x''' \mathring y''' \mathring z''' \\ \hline \dot x_1 \dot x_2 \dot x_3 & \\ \mathring y_1 \mathring y_2 \mathring y_3 & \\ \mathring z_1 \mathring z_2 \mathring z_3 & \end{array}$$

E. In quibus septem rectae sunt reales, quarum quidem 6 secant septimam, quatuor punctatae, quae eandem septimam realem secant, reliquae 16 imaginariae

$$\begin{array}{c|c} \bar A_1 \mathring B_1 \mathring C_1 & \bar x' \bar y' \bar z' \\ \mathring A_2 B_2 \dot C_2 & \mathring x'' \mathring y'' \mathring z'' \\ \mathring A_3 \dot B_3 \dot C_3 & \mathring x''' \mathring y''' \mathring z''' \\ \hline \bar x_1 \mathring x_2 \mathring x_3 & \\ \bar y_1 \mathring y_2 \mathring y_3 & \\ \bar z_1 \mathring z_2 \mathring z_3 & \end{array}$$

§ 26. Facile cognoscitur superficies A et B deduci posse realiter ex primo situ perspectivo (confer § 17). Atque apud superficies A quidem ternae rectae, quae non habent sectionem pro axibus haberi possunt. Apud superficies vero B, non ad arbitrium ternae illae rectae eligi possunt; nam si eligeremus exempli causa $\bar{x}'\bar{x}''\bar{x}'''$, inveniremus plana principalia esse imaginaria. (Sin vero eligimus e. c. $A_1B_1C_1$ plana principalia sunt realia.)

Ex situ vero secundo perspectivo et superficies A et B realiter deduci possunt, si pro axibus ponimus tres rectas ad arbitrium electas, quae se non secant. Atque invenimus superficiem secundi ordinis, quae definit relationem duploprojectivam in secundo situ perspectivo, esse hyperboloidem simplicem si superficies $\mathfrak{F}_3$ est ex genere A; si $\mathfrak{F}_3$ est ex genere B, potest esse hyperboloides (ex. c. si pro axibus ponimus $A_1B_1C_1$), potest vero etiam esse hyperboloides duplex vel ellipsoides (si ex. c. pro axibus ponimus $\bar{x}'\bar{x}''\bar{x}'''$). Atque etiam superficies, si est ex genere E, deduci potest ex situ perspectivo secundo (si axes e. c. sunt $\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$); tum superficies secundi ordinis, quae definit situm perspectivum, semper est ellipsoides sive hyperdoloides duplex.

Superficies C et D non realiter ex ullo situ perspectivo deduci possunt. Quum vero relationes projectivae semper facilem constructionem permittant, videmus superficies specierum A et B facillime construi posse; paullo difficilius superficies e specie E (quum non jam ex primo situ deduci possint, qui maxime commodus est) difficillime superficies specierum C et D, quum relatio duploprojectiva non jam sit realis. Longum est constructiones ipsas omnes enarrare, quae sive ex relatione projectiva sive ex simplicibus aequationum formis deduci possunt. Unum tantum casum commemoremus, ut qui sit simplicissimus:

Itaque construenda sit superficies $\mathfrak{F}_3$ quae in se habet 9 rectas reales datas triedrorum sectionem formantes $A_1B_1C_1$, et quae proficiscitur per punctum datum π_1.

$$A_2B_2C_2$$
$$A_3B_3C_3$$

Plana ex fascibus $A_1B_1C_1$ per π_1 ducta nominamus $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$. Ducamus transversalem quamlibet c per A_2B_2 quae secat A_2 in α_0, B_2 in β_0, planum $\mathfrak{c}_1$ in puncto γ. Ducamus plana α_0C_2, β_0C_2 nominemusque a' rectam, in qua se secant α_0C_2 et $\mathfrak{a}_1$, b' rectam, in qua se secant β_0C_2 et $\mathfrak{b}_1$; tum ducamus per γ rectam transversalem l rectarum $a'b'$, quae secat eas in α, β, ducamus planum $\mathfrak{Z}$ per l et c quae secat C_2 in puncto γ_0, construamus rectas $\alpha_0\gamma_0 = b$, $\beta_0\gamma_0 = a$.

Quaelibet recta l' in plano $\mathfrak{Z}$ sita secat a in α', b in β', c in γ'. Ducamus plana $\mathfrak{a}'_1$ ex fasce A_1 per α', $\mathfrak{b}'_1$ ex fasce B_1 per β', $\mathfrak{c}'_1$ ex fasce C_1 per γ'; tum punctum π', quod est sectio planorum $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1$, generat superficiem postulatam $\mathfrak{F}_3$ si l' variatur.

Nam quum recta l' conjungat puncta $\alpha'\beta'\gamma'$ in rectis abc duploprojective, (confer § 7 ad finem) etiam fasces $A_1B_1C_1$ sunt duploprojectivi quoad plana $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1$, itaque locus puncti π' est superficies tertii ordinis $\mathfrak{F}_3$, quumque linea l sit una ex lineis l' etiam π_1 est in $\mathfrak{F}_3$, quumque $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ sint puncta principalia rectarum abc, cognoscimus etiam $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ esse in $\mathfrak{F}_3$.

§ 27. De superficiebus C et D, quae continent tres tantum rectas reales triangulum formantes, si ea quae invenimus paullo aliter pronunciamus, consequuntur nonnulla observatione digna. Apparet plana triangulorum in superficie qualibet $\mathfrak{F}_3$ sitorum esse plana ter tangentia superficiem, suntque quidem puncta sectionis duarum rectarum trianguli puncta tangentialia. Iam si planum trianguli est reale et una recta realis, reliquae conjunctae punctatae, punctum reale in qua se secant rectae punctatae, est punctum tangentiale. (Duo alia puncta tangentialia plani

in hoc casu sunt imaginaria.) Estque haec tactio analoga tactioni ellipsoidis, ita ut punctum tactionis sit isolatum [vel si respicimus theoriam ill. Dupin indicatrix puncti illius est ellipsis, non hyperbole*)].

Iam si respicimus superficies specierum C et D, invenimus per unamquamque ex tribus rectis realibus $(A_1 B_2 C_3)$ aut bina (D) aut quaterna (C) plana realia duci posse quae tangunt superficiem in duobus imaginariis atque uno **puncto reali isolato** (quod ad planum pertinet). Quae puncta breviter **puncta isolatae tactionis** nominabimus). Quum autem in utraque specie superficierum nonnulla triangula ex tribus rectis punctatis composita sint quumque tria puncta realia earum sita sint in eadem recta reali (§ 22 ad finem 4) — quae quidem sectio est duorum planorum cum triangulis complexis —, consequitur, ex sex illis (D) sive duodecim (C) punctis realibus isolatae tactionis planorum triangulorum terna quaedam in recta reali esse sitas.

1) Primum quidem discutimus superficies speciei D sequimurque systemata in § 25 conscripta.

Puncta isolatae tactionis sunt:

1) in plano reali $\bar{A}_1 \dot{B}_3 \dot{C}_2$ punctum α_1, sectio rectarum $\dot{B}_3 \dot{C}_2$;
in plano reali $\bar{A}_1 \dot{x}_1 \dot{x}' \ldots . \alpha_2$, sectio rectarum x' et x_1;

2) in plano $\bar{B}_2 \dot{A}_3 \dot{C}_1 \ldots . \beta_1$
" " $\bar{B}_2 \dot{x}'' \dot{x}_2 \ldots . \beta_2$;

3) in plano $\bar{C}_3 \dot{A}_2 \dot{B}_1 \ldots . \gamma_1$
" " $\bar{C}_3 \dot{x}''' \dot{x}_3 \ldots . \gamma_2$;

triangula $B_1 C_2 A_3$ et $A_2 B_1 C_1$ secant se in recta reali in qua sunt sita $\gamma_1 \alpha_1 \beta_1$.

In sectione reali planorum $B_1 x' x_2$, $A_2 x'' x_1$ sunt sita $\gamma_1 \alpha_2 \beta_2$.

In sectione reali planorum $C_1 x x'_3 - A_3 x''' x_1$ sunt sita $\beta_1 \alpha_2 \gamma_1$.

In sectione reali planorum $B_2 x''' x_2 - C_2 x'' x_3$ sunt sita $\alpha_1 \beta_2 \gamma_2$.

Itaque haec 6 puncta sunt in eodem plano sita et sunt puncta angularia figurae quadrilateralis perfectae (**die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits**).

2) Respiciamus etiam superficies speciei C (in quibus igitur omnes rectae praeter $A_1 B_2 C_3$ sunt punctatae).

Accedunt ad puncta quae jam in D erant, haec sex nova puncta tactionis isolatae:

1) in plano $\bar{A}_1 \dot{y}' \dot{y}_1 \ldots \alpha_3$, in plano $\bar{A}_1 \dot{z}' \dot{z}_1 \ldots \alpha_4$
2) in plano $\bar{B}_2 \dot{y}'' \dot{y}_2 \ldots \beta_3$, in plano $\bar{B}_2 \dot{z}'' \dot{z}_2 \ldots \beta_4$
3) in plano $\bar{C}_3 \dot{y}''' \dot{y}_3 \ldots \gamma_3$, in plano $\bar{C}_3 \dot{z}''' \dot{z}_3 \ldots \gamma_4$.

*) Theorema ill. Dupin, si quis ad valores imaginarios respicit, congruit cum eo quod pronunciat, unumquodque planum tangentiale superficiei cujuslibet secare eam in curva quae habet punctum duplex in puncto tangentiali τ, ita ut brachia curvae quae per illud punctum proficiscuntur, sint aut realia aut imaginaria. Si indicatrix est hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \epsilon^2$, in qua ϵ fit $= 0$ brachia sunt realia et duae tangentia in τ sunt duae rectae reales, scilicet rectae $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$. Si indicatrix est ellipsis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (ϵ fit $= 0$) brachia sunt imaginaria et duae tangentes curvae in τ sunt duae rectae conjunctae punctatae $\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)$ $\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0$.

At facile intelligitur ex contemplatione triangulorum ex tribus rectis punctatis constitutorum, haec terna puncta in eadem recta esse sita:

$\alpha_1\beta_1\gamma_1$	$\alpha_2\beta_2\gamma_1$	$\alpha_2\beta_1\gamma_2$	$\alpha_1\beta_2\gamma_2$
	$\alpha_3\beta_3\gamma_1$	$\alpha_3\beta_1\gamma_3$	$\alpha_1\beta_3\gamma_3$
	$\alpha_4\beta_4\gamma_1$	$\alpha_4\beta_1\gamma_4$	$\alpha_1\beta_4\gamma_4$
	$\alpha_2\beta_3\gamma_4$	$\alpha_4\beta_2\gamma_3$	$\alpha_3\beta_4\gamma_2$
	$\alpha_2\beta_4\gamma_3$	$\alpha_3\beta_2\gamma_4$	$\alpha_4\beta_3\gamma_2$.

Hae sunt 16 rectae, quarum 1) 4 per unumquodque punctum proficiscuntur; 2) duodecies quaternae eligi possunt quae sunt in eodem plano formantque quadrilateralem perfectam, quarum 6 intersectiones reciprocae sunt puncta isolatae tactionis. Unaquaeque recta in tribus quadrilateralibus invenitur, unumquodque punctum isolatae tactionis in sex. Si tria puncta quae in eadem recta sunt (ex. c. $\alpha_1\beta_1\gamma_1$) cogitatione a reliquis distinguimus, situm punctorum ita respicere possumus:

Ponimus triedrum formatum planis $\mathfrak{ABC}$, quae se secant in *abc*, ponimus praeterea rectam quamlibet *d*, quae secat $\mathfrak{ABC}$ in $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, ducimus per *d* planum quodlibet $\mathfrak{P}_2$ quod secat *abc* in $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, ducimus quoque per *d* alterum planum $\mathfrak{P}_3$ quod secat *abc* in $\alpha_3\beta_3\gamma_3$, conjungimus $\alpha_2\beta_3$, $\beta_3\alpha_2$ nominamusque sectionem istarum rectarum γ_4, sectionem rectarum $\alpha_2\gamma_3$ et $\alpha_3\gamma_2$ nominamus β_4, sectionem rectarum $\beta_2\gamma_3$, $\beta_3\gamma_4$ nominamus α_4. Tum $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ sunt in plano $\mathfrak{P}_4$, quod ipsum quoque per *d* proficiscitur et *puncta* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ *habent inter se nexum 12 punctorum isolatae tactionis superficierum* *C*.

Notationes.

1) 12 ista puncta hac ratione quadragies octies (48) differentem in modum construi possunt.
2) 12 planis, in quibus quadrilaterales perfectae istis punctis definitae sunt sitae, polarisatione harmonica respondent 12 puncta, quae easdem habent proprietates ac nostra puncta, ita ut decies sexios in eadem recta sint sita etc. etc.

Exstant multa alia, quae ex nexu illorum punctorum consequuntur, de quibus hic diutius disserere longum est.

De casibus singularibus.

Quae de realitate rectarum in $\mathfrak{F}_3$ sitarum demonstravimus, ad eos tantum casus pertinebant in quibus 27 rectae non singularem habebant situm, neque etiam si ex rectis illis sive una sive complures fiunt infinite remotae, vel si duae sunt infinite propinquae, istae leges mutantur, dummodo methodum limitariam adhibeamus. Sed ii casus, in quibus duae rectae, quae in casu generali non se secant, tamen habent sectionem, quamvis ipsi quoque casus limitarii generalium superficierum sint, si ad realitatem rectarum spectamus non in unam ex speciebus commemoratis superficierum inseri possunt, ut qui efficiant transitum ex altera specie in alteram (quemadmodum apud superficies secundi ordinis conus). Istorum casuum singularium accuratam disquisitionem quum in aliud tempus reservaverim, attamen jam nunc eos breviter enarrare liceat.

Sunt istarum singularium superficierum duo genera:

I) superficies regulatae (geradlinige),

II) superficies cum una vel compluribus constrictionibus (Einschnürungen).

Inter superficies regulatas discernendae sunt conicae superficies a non conicis.

Conicae enim superficies et ad genus I et ad genus II pertinent, quum vertex coni sit constrictio.

I) **Superficies regulatae.**

a) **Conus** generatur tribus fascibus duploprojectivis quorum axes per idem punctum proficiscuntur et elucet:

ternas rectas generatrices respici posse tamquam axes,

verticem semper esse realem si conus ipse est realis,

in cono reali simplicem catervam generatricium esse realem, reliquas punctatas (ita ut quivis conus realiter duploprojectiva relatione generari possit).

b) **de superficiebus regulatis non conicis** invenimus haec:

Superficies per sectionem duorum triedrorum ducta $\mathfrak{F}_3$ est regulata, si recta secundum quam duo plana alterius triedri se secant congruit cum recta secundum quam duo plana alterius triedri se secant, sive (id quod est idem) si duo axes trium fascium duploprojectivorum congruunt (A_1 et B_1).

Itaque aequatio superficierum regulatarum hanc habet formam:

$$\text{I.}\quad pqr + p_1(\alpha q + \beta r)(\gamma q + \delta r) = 0.$$

Et rectae generatrices sunt

$$\begin{aligned} &q - \lambda r = 0 \\ &p\lambda + p_1(\alpha\lambda + \beta)(\gamma\lambda + \delta) = 0 \end{aligned}$$

vel

$$\text{II.}\quad q - \lambda r = 0,\ p + p_1\left(\frac{\alpha\gamma\lambda^2 + (\beta\gamma + \alpha\delta)\lambda + \beta\delta}{\lambda}\right) = 0$$

vel si ponimus

$$\text{III.}\quad \frac{\alpha\gamma\lambda^2 + (\beta\gamma + \alpha\delta)\lambda + \beta\delta}{\lambda} = \mu$$

videmus superficies illas sectionem esse planorum

$$\begin{aligned} p + \mu p_1 &= 0 \\ q + \lambda r &= 0 \end{aligned}$$

si inter λ et μ existit relatio algebraica formae III, quae est primi ordinis, quod ad μ pertinet, secundi, quod ad λ pertinet et quae fit, si $\frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\gamma} = 2B$, $\frac{1}{\alpha\gamma} = 2A$, $\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma} = C$

$$\text{IV.}\quad \lambda^2 + 2(A + B\mu)\lambda + C = 0.$$

Recta $p = 0$, $p_1 = 0$ est ipsa in superficie et secundum rectam $q = 0$, $r_1 = 0$ superficies se ipsa persecat (est igitur ista recta duplex).

Haec et permulta alia de superficiebus regulatis tertii ordinis ill. Cremona nuper ex aliis contemplationibus invenit*). — Si ad realitatem rectarum etc. spectamus nonnulla invenimus digna quae commemorentur:

Facile demonstrari potest, si superficies est realis, rectas $q = 0$, $r = 0$; $p = 0$, $p_1 = 0$ semper esse reales, ex generatricibus unam catervam esse realem, reliquas

---

*) Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe; di. Crell. vol. LVIII pag. 138. — Sul superficie gobbo del terz ordine. (Comm. al Reale Istit. Lomb. etc. 18. aprile 1861.)

esse punctatas. Ex qua re consequitur, si $q = 0$, $r = 0$, $p = 0$, $p_1 = 0$, reales esse volumus in aequatione IV A, B, C, esse reales. Ex aequatione IV consequitur

$$\lambda = -(A + B\mu) \pm \sqrt{(\lambda B\mu)^2 - C}.$$

Itaque si C est positivus et $> A^2$, invenimus, si ponimus $\mu < \frac{\sqrt{C} - A}{B}$, duos valores λ, quae iis respondent aequatione IV, esse complexos, quare pars rectae duplicis $q = 0$, $q_1 = 0$ est isolata.

Existunt igitur superficies regulatae tertii ordinis, quarum recta duplex habet partem isolatam.

Exempli causa superficies $zx^2 - ay = 0$ (in qua a est valor positivus realis), quarum generatrices sunt $z - \lambda a = 0$, $\mu x - y = 0$ si $\lambda^2 = \mu$, habet rectam duplicem $x = 0$, $y = 0$, i. e. axem coordinatarum z, et ex ipsa aequatione videmus partem negativam istius axis esse isolatam. [In omnibus superficiebus regulatis, quae generantur duobus fascibus $p + \lambda q = 0$, $p_1 + \mu q_1 = 0$, si λ et μ conjuncta sunt relatione algebraica quae est paris ordinis (von geradem Grade) quod ad λ pertinet, recta $p = 0$, $q = 0$ potest habere partes isolatas.]

II. **Superficies cum constrictionibus.** Si habemus tres fasces duploprojectivos $A_1 B_1 C_1$, et duo axes $A_1 B_1$ se secant in puncto δ (quae quidem se non secabant in casu generali); ac si superficies neque est regulata neque dissoluta, **habet constrictionem in illo puncto.** Unumquodque enim planum α per A_1 ductum secat $\mathfrak{F}_3$ (praeter quam in axi) in conica quae per δ proficiscitur, ad quam si ducimus tangentem in puncto δ, facile ex relationibus projectivis intelligitur, locum tangentium A esse conum secundi ordinis, qui non potest esse dissolutus nisi superficies secat se ipsa, ita ut sit regulata.

Itaque $\mathfrak{F}_3$ in δ habet constrictionem.

(Eaedem superficies etiam generantur tribus singularibus fascibus duploprojectivis quorum bina plana principalia singulorum fascium in unum congruunt; confer § 7. Tum sectio planorum principalium est constrictio.)

Si duo axes $B_1 C_1$ secant tertiam A_1 ($A_1 B_1 C_1$ sint conjuncti duploprojective), $\mathfrak{F}_3$ habet **duas constrictiones** (δ et δ_1) (eodem modo si habemus tres fasces singulares quorum duo axes se secant).

Si axes fascium duploprojectivorum $A_1 B_1 C_1$ sunt in eodem plano formantque triangulum cujus puncta angularia sunt $\delta\ \delta_1 \delta_2$, superficies $\mathfrak{F}_3$ habet **tres constrictiones.** (Eodem modo si habemus tres fasces singulares, quorum unus axis a reliquis secatur, $\mathfrak{F}_3$ habet tres constrictiones.)

Si axes trium fascium singularium duploprojectivorum formant triangulum $\delta\ \delta_1 \delta_2$ et sectio planorum principalium est δ_2, $\mathfrak{F}_3$ habet 4 **constrictiones** [$\delta\ \delta_1 \delta_2 \delta_3$ formant tetraedrum cujus 6 rectae (Kanten) sunt in superficie.]

Facile etiam demonstratur, superficiem tertii ordinis **non plus quam 4 constrictiones habere posse.**

VITA.

Natus sum Fridericus Guilelmus Oscar August Berolini die XXVII mensis Septembris anno MDCCCXL, patre Ernesto Ferdinando August et matre Johanna e gente Fischer, quibus adhuc viventibus gaudeo. Fidei addictus sum evangelicae. Primis literarum elementis imbutus anno h. s. XLIX Gymnasium Reale Coloniense, quod etiam nunc Berolini patre directore eximie floret, frequentare coepi. Ibi IX annos commemoratus tempore paschali a. LVIII testimonium maturitatis adeptus sum, et Halas me contuli, ubi a rectore magnifico ill. Moll in numerum civium almae universitatis Fridericianae receptus sum, ut ad studia incumberem quum philosophica tum mathematica physicaque. Ibi per duo semestria docuerunt me viri ill. ill. cel. cel. Erdmann, Haym, Heidenhain, Heine, Heintz, Knoblauch, Neumann, Schaller. Colloquiis physicis, quibus praeest ill. Knoblauch, nec non exercitationibus seminarii mathematici, quas ill. Heine moderatur, interfui. Postea Berolinum reversus a Rectore Magn. ill. Dove numero civium almae Fridericae Guilelmae adscriptus sum et per quatuor semestria audivi viros ill. ill. cel. cel.: A. Benary, Borchard, Christoffel, Dove, Franz, Hoppe, Kummer, Weierstrass, Werder, Steiner, Trendelenburg. Colloquiis physicis viri ill. Magnus exercitationibusque seminarii mathematici quas moderantur ill. ill. Kummer et Weierstrass interfui.

Omnibus autem viris, qui mihi literarum aditus aperuerunt adolescentisque progressus foverunt et adjuvarunt, optime de me meritis gratias quam maxumas ago memorque semper persolvam.

THESES.

1. In sensuum perceptione cognoscenda et explicanda ad mentis abstractae functiones non possumus non recurrere.
2. Geometria nisi admissis valoribus imaginariis commode tractari non potest.
3. Intuitio geometrica non solum ad analyticas leges dilucidius explanandas sed etiam ad novas methodos inveniendas permultum valet.
4. Theoria quam ill. Brücke in „Müllers Archiv 1841" de binoculari visu exposuit refelli videtur experimentis simplicibus.